APLICAÇÃO DO MODELO DE MARKOWITZ NA CARTEIRA DO IBOVESPA

Romulo de Oliveira Corcino dos Santos (IC) e Agostinho Celso Pascalicchio (Orientador)

Apoio:PIBIC Mackenzie

RESUMO

Este estudo acadêmico foi desenvolvido com o intuito de selecionar um portfólio de ações entre as que formam o índice da Bolsa de valores de São Paulo (IBOVESPA) mediante a aplicação do modelo de Markowitz, em diferentes períodos de análise, e a posterior avaliação do desempenho dessas carteiras em relação ao índice Ibovespa, buscando testar um modelo que possibilita tornar as técnicas de gestão de carteiras de investimentos mais eficientes e eficazes, principalmente as técnicas de gestão passiva, que por sua vez, não tem o objetivo de ter um desempenho cima do benchmark. O gestor desse tipo de fundo busca "replicar" a performance do benchmark. A elaboração das carteiras eficientes de mínima variância se dá por meio do cálculo dos retornos médios e da covariância entre os ativos de um grupo formado pelas ações que compõem a carteira teórica do Ibovespa em cada quadrimestre de janeiro de 2020 à agosto de 2021. No estudo é realizada a comparação em termos de rentabilidade e relação risco retorno entre as carteiras eficientes e o Ibovespa no período citado, por meio de técnicas de back testing. Essa técnica consiste no teste do modelo para verificar se os seus resultados estão de acordo com o que aconteceu na realidade, usando como base os dados históricos. Os resultados a partir da análise dos dados são de que foi possível observar a eficiência do modelo de Markowitz para a criação de carteiras eficientes, haja vista que esse estudo apresentou resultados superiores ao Ibovespa na maioria dos casos apresentados, mostrando indícios de que possa vir a ser eficaz no sentido de minimizar o risco associado a cada taxa esperada de retorno dos portfólios.

Palavras-chave: Markowitz. Seleção ótima. Racionalidade. Ibovespa. Portfolio

ABSTRACT

This paper address to analyze the optimal portfolio with stocks among those that make up the São Paulo Stock Exchange (IBOVESPA) index by applying the Markowitz model, in different periods of analysis, and the subsequent evaluation of their performance. portfolios in relation to the Ibovespa index, seeking to test a model that makes it possible to make investment portfolio management techniques more efficient and effective, mainly as passive management techniques, which, in turn, do not aim to exceed the benchmark performance. The manager of a fund with this type of strategy seeks to "replicate" a performance of a benchmark index. In other words, the idea is for the fund's profitability to follow a variation in a given benchmark. The preparation of efficient minimum variance portfolios is done by calculating the average returns and covariance between the assets of a group formed by the stocks that make up the theoretical portfolio of Ibovespa in each four-month period from January 2020 to August 2021. No study a comparison is made in terms of profitability and risk-return ratio between the efficient portfolios and the Ibovespa in the aforementioned period, using previous test techniques. This technique consists of testing the model to verify that its results are in accordance with what happened in reality, using historical data as a basis. The results obtained from the data analysis are that it was possible to observe the efficiency of the Markowitz model for the creation of efficient portfolios, given that this study results superior to the Ibovespa in the series of cases, explaining indications that a being may come. effective in minimizing the risk associated with each expected rate of return on the portfolios.

Keywords: Markowitz. Ibovespa. Portfólio

1. INTRODUÇÃO

Há uma batalha entre as abordagens qualitativas e quantitativas em muitos campos, incluindo investimentos, esportes, negócios e política. A abordagem quantitativa, por permitir que uma grande quantidade de dados seja rapidamente analisados, fizeram a linha de batalha entre estas posições analíticas serem mais tênues. Com isto, a questão central passou a ser a de fazer com que o conhecimento dos dois campos, para ser mais eficaz a análise, seja a de fazer com que as informações destas áreas trabalhem juntos, para ser mais eficaz do que qualquer um deles individualmente. O advento do xadrez de estilo livre oferece esperança para essa possibilidade. No xadrez de estilo livre, os humanos podem usar dados de programas de xadrez para selecionar seus movimentos. Não é mais homem contra máquina, mas sim homem mais máquina contra todos os adversários. A partir de agora, a combinação de homem e máquina é melhor do que homem ou máquina. A habilidade humana essencial em combinar os dois não é aptidão para a atividade em si, mas sim saber como e quando apelar para a força de cada abordagem. O xadrez é um jogo de perfeitas informações estáveis e lineares. Por causa dos incontáveis estados possíveis, o jogo é extremamente complicado, mas não é um sistema adaptativo complexo. Os mercados são sistemas adaptativos complexos, com sistemas imperfeitos de informação, instabilidade e não linearidade. Ainda assim, acredita-se que algumas das lições do xadrez de estilo livre são úteis. Feito corretamente, uma fusão entre métodos qualitativos e quantitativos podem muito bem produzir resultados melhores do que qualquer um deles isoladamente. Se fosse para dizer qual campo tem mais a ganhar com o outro, poderia ser dito que os analistas fundamentais têm mais a aprender com os quants do que o contrário. Não importa qual abordagem você use, espera-se que pensar sobre o sucesso do xadrez de estilo livre provoque algumas ideias que podem torná-lo mais eficaz.

Pensando em uma forma de aumentar a eficácia dos gestores de carteira e até mesmo de investidores pessoa física que queriam gerir seus próprios recursos com decisões com menos vieses, este estudo foi elaborado com o intuito de desenvolver e pesquisar uma ferramenta para auxiliar o investidor na tomada de decisão, assim como os softwares estão auxiliando os enxadristas em suas tomadas de decisões e na melhora do desempenho técnico. A teoria desenvolvida por Harry Markowitz em 1952, será base de análise deste estudo. Esta foi considerada um grande passo na análise de investimentos além de ser muito utilizada, principalmente com a popularização do microcomputador, que foi grande facilitador para a sua aplicação.

Este estudo acadêmico tem por objetivo comparar o desempenho previsto de uma carteira ótima de ações, criada a partir da carteira teórica do Ibovespa e dados históricos com período compreendido entre janeiro de 2020 e agosto de 2021, com o desempenho real obtido pelo Ibovespa durante este período, por meio de técnicas de back testing. Essa técnica consiste no teste do modelo para verificar se os seus resultados estão de acordo com o que aconteceu na realidade, usando como base os dados históricos do Excel. A carteira ótima de ações será criada por meio da aplicação do modelo de Markowitz para a criação de portfólios de investimento, considerando as cotações havidas no periodo de análise. O processo de otimização por algoritmos como o proposto por Markowitz considera questões como a relação entre os históricos de rendimentos das ações para determinar a participação de cada título na carteira, determinando o retorno esperado e o risco desta (MARKOWITZ, 1952). Portanto, a pergunta de pesquisa deste trabalho pode ser descrita da seguinte forma: uma carteira teórica de ações criada pelo método de Markowitz teria um bom desempenho no período seguinte à base usada para sua?

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo será abordado conceitos utilizados como fundamentação teórica para o desenvolvimento do trabalho.

Além do estudo da Teoria de Markowitz será feita uma breve revisão dos conceitos relacionados à composição de carteiras de investimentos e de alguns conceitos de estatística envolvidos no modelo, tais como, a média das rentabilidades das ações, que representa o retorno; desvio-padrão, que define o risco; variância; correlação e covariância.

2.1 Covariância

O que Markowitz fez foi encontrar uma maneira e determinar o quão arriscado é todo o portfólio (Markowitz, 1959). Esta pode ser sua maior contribuição. Ele chamou de covariância, com base na fórmula já estabelecida para a variância da soma ponderada.

A covariância mede a direção de um grupo de ações. Duas ações apresentam alta covariância quando seus preços, por qualquer motivo, tendem a se mover juntos. Em oposição, baixa covariância descreve duas ações que se movem em direções opostas. De acordo com Markowitz (1959), o risco de uma carteira não é a variância das ações individuais, mas a covariância de todo o portfólio. Quanto mais eles se movem na mesma direção, maior é a chance que as mudanças econômicas irão derrubá-los todos ao mesmo tempo. Da mesma forma, uma carteira composta de ações de risco pode realmente ser uma seleção conservadora se o preço individual das ações muda de maneira diferente. Quanto menor for a covariância entre os dois títulos, ou seja, quanto mais fora de sincronia eles estão, menor é a volatilidade de uma carteira que os combina.

2.2 Desvio Padrão

Uma vez que o resultado da variância é expresso em unidades ao quadrado, temos que calcular a raiz quadrada e, com isso, obtemos o desvio padrão. Assim temos uma medida com as mesmas unidades que os dados:

$$S = \sqrt{Variância}$$

Se s=0, então não existe variabilidade, ou seja, todos os dados são iguais.

Essas duas medidas determinam a variabilidade de distribuição de retornos sobre a sua média. Por exemplo, quando se realiza um investimento, há duas probabilidades, em linhas gerais: que o valor investido renda positivamente ou negativamente em relação a determinado patamar. Por sua vez, ao investir num fundo DI ou em títulos pós-fixados do tesouro nacional e se calcular o desvio padrão será possível notar uma possível dispersão com relação a média, pois os desvios são mais constantes

O desvio padrão é a medição da incerteza associada ao ativo, a medida da dispersão de um conjunto de dados de sua média. Quanto mais espalhados os dados, maior é o desvio.

Tal como acontece com o retorno esperado, é uma medida necessária para estimar o desvio padrão do portfólio. O desvio padrão é considerado a medida de risco de um investimento.

Pode ser fornecido por estimativa lógica ou pela configuração de uma distribuição de probabilidade.

O desvio padrão da taxa de retorno da carteira depende dos desvios padrão de retorno para os títulos que o compõem, seus coeficientes de correlação e as proporções investidas. É calculado com a seguinte equação:

$$\sigma_\rho = \sqrt{(W_A^2 + {}^2_A) + (W_B^2 + {}^2_B) + 2\ x\ W_A\ \ x\ W_B^2\ x\ COV_{A,B}}$$

Com 3 ativos diferentes ficaria assim:

$$\sigma_\rho = \sqrt{(W_A^2 + {}^2_A) + (W_B^2 + {}^2_B) + (W_C^2 + {}^2_C) + W_A\ \ x\ W_B^2\ x\ COV_{A,B} + W_A\ \ x\ W_C^2\ x\ COV_{A,C} + W_B\ x\ W_C^2\ x\ COV_{B,C}}$$

- Lembrando que σ é o risco ou desvio-padrão da carteira.
- W é o peso do ativo na carteira, ou seja, a participação percentual em relação ao total da carteira.
- COVA, B é a covariância do ativo A com o ativo B.

Essa teoria diz que quando o investidor diversifica a sua carteira ao escolher riscos com correlação negativa pode diminuir ou até mesmo eliminar o risco diversificável. (STUMPF, 2019)

2.3 Índice Bovespa

Segundo o site da B3, o Ibovespa é o principal índice de desempenho das ações negociadas na B3 e reúne as empresas mais importantes do mercado de capitais brasileiro. Foi criado em 1968 e, ao longo desses 50 anos, tornou-se referência para investidores ao redor do mundo.

Reavaliado a cada quatro meses, o índice é resultado de uma carteira teórica de ativos. É composto pelas ações e units de companhias listadas na B3 que atendem aos critérios descritos na sua metodologia, baseado em presença nos pregões e no volume transacionado, correspondendo a cerca de 80% do número de negócios e do volume financeiro do nosso mercado de capitais.

Construção da Metodologia

Universo de ativos elegíveis	Ações e units de ações
Critérios de Seleção	Estar entre os ativos que representem 85% em ordem decrescente de Índice de Negociabilidade (IN) (buffer 90%); 95% de presença em pregão;

	0,1% do volume financeiro no mercado a vista (lote-padrão); e não ser penny stock.
Ponderação	Valor de mercado do free float / cap 20% por empresa / cap 2x IN
Tipo de retorno	Total (R$)
Rebalanceamento	Quadrimestral (1ª segunda-feira de Janeiro, Maio e Setembro)

(B3, 2021)

2.4 Alocação de ativos

Uma variação de diferentes ativos fornecerá ao investidor uma variabilidade de retorno na carteira do investidor e reduzirá o risco. Para alcançar a otimização da carteira, o investidor deve alocar a carteira em diferentes classes de ativos. A maneira mais benéfica de alocar os ativos é permitir que um toque global permeie o portfólio. Olhe para diferentes mercados para encontrar independência, portanto, reduzir o risco (Litterman, 2003).

Para alcançar a otimização em nível global é de grande importância olhar para diferentes tipos de setores e indústrias, isso é apoiado por Markowitz (1959). O investidor trata o mercado nacional como um mercado global com todos os seus diferentes setores industriais onde cada setor simboliza um mercado nacional. Os diversos setores industriais são, em certa medida não correlacionado e fornecerá um excesso de retorno positivo e, consequentemente, deve ser adicionado ao portfólio.

Independência e diversificação são importantes para atingir a otimização, e a alocação de ativos em diferentes tipos de indústrias é o que o investidor faz praticamente para atingir a otimização. A janela de oportunidade com ferramentas matemáticas, o resultado estatístico dá ao investidor uma indicação da adequação da oportunidade na perspectiva de a aversão do investidor ao risco. Ao alocar o portfólio de um ponto de vista global, é importante estar ciente de que os custos de transação provavelmente aumentarão em grande medida (Litterman, 2003).

2.5 Teoria moderna de portifólios

The Modern Portfolio Theory (MPT) foi desenvolvido por Harry Markowitz. Ele assumiu que a maioria dos investidores deseja ser cauteloso ao investir e que eles desejam assumir o menor risco possível, a fim de obter o maior retorno possível, otimizando o retorno para a relação de risco. MPT afirma que não basta olhar para o risco e retorno esperados de um estoque particular. Ao investir em mais de uma ação, um investidor pode obter os benefícios da diversificação, uma redução na volatilidade de toda a carteira (Markowitz,1959).

O'Neill (2000) afirma que existem dois aspectos por trás da teoria e esses a história pode se repetir, o que significa que o uso de dados históricos de valores mobiliários é

importante e útil. O segundo aspecto é que nem todos os ativos aumentam e diminuem em conjunto. Esses aspectos são úteis para uma variedade de investidores porque podem ajudar o investidor na tomada de decisões. De acordo com O'Neill (2000) o MPT possui importantes aplicações práticas como, por exemplo, reduzir volatilidade em uma carteira de ações individuais. Até a época em que o MPT foi inventado por Markowitz, os investidores pensaram muito pouco sobre como administrar um portfólio ou sobre o conceito de risco. Os portfólios foram construídos aleatoriamente. Se um investidor pensasse que uma ação estava subindo um preço, foi adicionado ao portfólio. Nenhum outro pensamento foi necessário ou feito (Hagstrom,2001).

Markowitz (1959) desenvolveu um procedimento matemático que produziria o conjunto das melhores carteiras teóricas. Suponha que o investidor possa alinhar uma tabela de todas as carteiras que têm o mesmo nível de risco. Embora o risco das diferentes carteiras seja o mesmo, mas com uma rentabilidade diferenciada, a escolha do melhor portfólio é simples, aquele com o maior Retorno. E vice-versa, escolheria aquele de menor risco. O melhor teórico carteira terá o menor risco para um determinado nível de retorno esperado e o maior retorno para um determinado nível de risco.

A essência do MPT é buscar a otimização da relação entre risco e retorno por composição de carteiras de ativos determinados por seus retornos, riscos e covariâncias ou correlações com outros ativos. MPT desenvolve uma estrutura onde, qualquer retorno esperado é composto de vários resultados futuros e são, portanto, arriscados, e esta relação entre risco e o retorno pode ser otimizado por meio da diversificação.

Cada portfólio que satisfaça essas duas condições é chamado de portfólio eficiente. Nenhum outro a carteira terá um retorno maior no mesmo nível de risco (Markowitz, 1959). Um portfólio é ineficiente se é possível alcançar maior retorno esperado sem maior risco, ou reduzir o risco com o mesmo nível de retorno esperado (Markowitz, 1991).

Elton e Gruber (1997) afirmam que existem dois princípios do MPT que levaram à formulação da fronteira eficiente, ou seja, mantendo a variância constante e maximizando o retorno esperado e a manutenção do retorno esperado constante minimizarão a variância..

2.6 Retorno

O retorno esperado de uma carteira é a média ponderada do retorno esperado dos ativos individuais. Dependendo do peso de um ativo individual, esse ativo terá um impacto maior ou menor no retorno da carteira.

Existem diferentes abordagens para estimar o retorno esperado de um ativo. Uma abordagem é para estimar a probabilidade de resultados de retorno diferentes, em oposição a fazer estimativas com base em dados históricos. Para compor uma carteira, é fundamental fazer estimativas dos retornos dos ativos incluídos na carteira. O retorno de todo o portfólio pode ser previsto com a mesma precisão. Infelizmente, não é possível estabelecer a taxa de retorno de um ativo com certeza. O objetivo é fazer uma previsão sobre cada ativo, a fim de produzir previsões sobre todo o portfólio. Sem estimativas dos ativos individuais, é impossível fazer uma previsão do portfólio. A equação a seguir mostra o retorno esperado da carteira.

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} R_i w_i$$

Sendo :

$R_p =$ Retorno da carteira

R_i = Retorno do ativo i

$n = Número\ de\ ativos\ na\ carteira$

$w_i = Peso\ do\ ativo\ i\ na\ composição\ da\ carteira$

Segundo Securato (2001) como o resultado só é conhecido ao fim do período de maturação, no momento da tomada de decisão os retornos dos ativos devem ser tratados como variáveis aleatórias.

2.7 Gestão de passivo e ativos

Existem dois tipos distintos de estilos para usar ao gerenciar um portfólio, ativo e gerenciamento passivo. Os dois estilos de gerenciamento são opostos e a combinação dos estilos é quase infinita. Um estilo de gestão ativo preconiza a agressividade, compra e venda de títulos para vencer o mercado, que normalmente é simbolizado por algum tipo de índice (Litterman, 2003).

Grinold (1989) afirma em sua pesquisa que “todos os investidores que têm objetivos de variância média irão preferir ter o portfólio com o maior índice de informação possível”. Uma coisa que difere entre os investidores é sua aversão ao risco. Um investidor com alta aversão ao risco terá uma perspectiva em relação à informação e terá menor valor agregado e vice-versa para o investidor com baixa aversão ao risco.

O índice de informação é o parâmetro mais importante para cada investidor que usa um ativo estilo de gestão, uma vez que os gestores ativos buscam títulos precificados incorretamente, os a informação é fundamental. Existem algumas consequências que caracterizam o gerenciamento ativo. Eles sustentam mais custos de pesquisa / informação, o giro do portfólio é maior custo de transação, comércio frequente leva a baixa eficiência tributária - capital de curto prazo os ganhos são totalmente tributados e um risco maior leva a retornos esperados mais elevados (Bodie et al., 2004).

O estilo de gestão passiva implica que a carteira seja construída de forma a imitar um mercado índice. Esta é uma alternativa menos arriscada onde você renuncia à oportunidade de vencer o mercado, mas por outro lado, certifique-se de que a carteira não fique abaixo do mercado movimento. As consequências que distinguem a gestão passiva são, portfólio baixo volume de negócios. Isso só ocorre quando a composição do índice muda, baixos custos de pesquisa / informação, baixo custo de transações e alta eficiência tributária - capital de longo prazo os ganhos são tributados a taxas mais baixas (Bodie et al., 2004).

2.8 Gestão Estratégica de Ativos vs. Gestão Tática de Ativos

Segundo Litterman (2003) o horizonte de tempo é um fator fundamental na estratégia e gerenciamento tático de ativos. Esta teoria considera quanto tempo o investidor irá manter sua carteira antes de liquidar o investimento. O estilo de gestão estratégica de ativos foco nas

participações de longo prazo de cada investimento, oposto ao foco de gerenciamento tático de ativos objetivos de investimento de curto prazo. Semelhante à gestão ativa e passiva, a abordagem de cada investidor é individual e o estilo de gestão selecionado refletirá os critérios do investidor para investir.

Campbell e Viceira (2002) afirmam, se detém uma carteira de longo prazo o investidor constantemente precisa reajustar os ativos, a fim de manter uma consequente política de investimentos, uma vez que o as condições do mercado variam com o tempo.

2.9 Binômio Risco-Retorno

O risco é a força que impulsiona o retorno de um investimento para cima ou para baixo. Um investidor que assume um investimento se colocar em uma situação de risco. Uma vez que o risco impulsiona o retorno, naturalmente não é algo que deva ser evitado. No entanto, deve ser gerenciado, e o potencial de longo prazo de um investimento depende do investidor estar disposto e preparado para o risco. O risco deve ser orçado, e deve-se decidir qual perda potencial pode ser pago (Litterman, 2003). Investimentos bem-sucedidos são aqueles ativos com a melhor relação risco-recompensa. O conceito da teoria do portfólio é maximizar a relação entre o risco e a recompensa (Bodie et al., 2004).

2.10 Diversificação

Diversificar em vários títulos diminui a exposição a fatores específicos da empresa, o que faz com que a volatilidade da carteira diminua. Mas mesmo com muitos ativos, não é possível evitar todos os riscos. Todas as carteiras são afetadas por fatores macroeconômicos que influenciar o mercado.

Ao alocar os ativos, é importante entender como as incertezas dos diferentes ativos interagem. O principal determinante do risco da carteira é a extensão para que os retornos sobre os diferentes tendem a variar juntos ou na direção oposta. O risco depende da correlação entre os retornos dos diferentes títulos da carteira. O desempenho dos ativos de uma determinada carteira tende a acompanhar o mercado, caso haja uma recessão ou um crescimento, o ativo se moverá em uma determinada direção. Se um ativo sobe em um período de crescimento, a chance de um ativo semelhante subir é quase certa. Isso é o que afirma a correlação e é por isso que deve haver uma variedade de ativos dentro da carteira em fim de fornecer um portfólio que possa lidar com recessões e crescimento. O problema é medir a tendência dos retornos dos diferentes ativos, se eles se movem juntos ou na direção oposta. As medidas para resolver esses problemas são a covariância e o coeficiente de correlação. Diversificação eficaz é encontrar ativos de risco com a correlação mais baixa possível. Resultado de correlação zero em que os ativos interagem independentemente de uns aos outros. O movimento de um ativo não afeta a direção de outro ativo, consequentemente diversificação eficiente é alcançada. Uma carteira composta com uma correlação geral baixa é crucial para os investidores que buscam diversificar a fim de eliminar o não sistemático risco. (Sharpe, 2000)

3. METODOLOGIA

A partir das composições da carteira teórica do IBOVESPA de janeiro a abril de 2020 (com um total de 71 ativos), de maio a agosto de 2020 (com um total de 74 ações), de setembro a dezembro de 2020 (com um total de 76 ações) e de janeiro a abril de 2021 (com um total de 80 ações), foi utilizado o histórico de cotações do Excel para encontrar as cotações de cada período (conforme a figura 1). Assim, foi possível calcular a variação percentual das rentabilidades dos ativos financeiros por dia, utilizando a cotação da ação no fechamento do pregão. Nas datas em que não havia cotação dos ativos (como fins de semana e feriados), estas foram desconsideradas.

	ABEV3	AZUL4	B3SA3	BBAS3	BBDC3	BBDC4	BBSE3	BEEF3	BPAC11	BRAP4
Data	Fechamento	Fechamento	Fechamento	Fechamento	Fechamento	Fechamento	Fechamento	Fechamento	Fechamento	Fechamento
30/12/2020	R$ 15,65	R$ 39,30	R$ 20,66	R$ 38,80	R$ 24,20	R$ 27,14	R$ 29,63	R$ 10,18	R$ 23,50	R$ 63,71
04/01/2021	R$ 15,48	R$ 37,73	R$ 20,33	R$ 37,59	R$ 23,60	R$ 26,43	R$ 29,39	R$ 10,04	R$ 22,98	R$ 66,50
05/01/2021	R$ 15,81	R$ 38,20	R$ 20,37	R$ 37,20	R$ 23,47	R$ 26,25	R$ 28,84	R$ 9,84	R$ 22,67	R$ 67,80
06/01/2021	R$ 16,05	R$ 36,66	R$ 19,92	R$ 37,99	R$ 23,97	R$ 27,07	R$ 28,37	R$ 9,69	R$ 21,88	R$ 70,54
07/01/2021	R$ 16,05	R$ 36,05	R$ 20,59	R$ 39,56	R$ 24,65	R$ 27,84	R$ 28,97	R$ 9,65	R$ 22,61	R$ 76,38
08/01/2021	R$ 16,53	R$ 36,60	R$ 20,90	R$ 39,79	R$ 24,46	R$ 27,60	R$ 29,87	R$ 9,73	R$ 23,08	R$ 76,77
11/01/2021	R$ 16,10	R$ 36,44	R$ 20,04	R$ 39,14	R$ 24,09	R$ 27,11	R$ 29,25	R$ 9,61	R$ 22,21	R$ 76,00
12/01/2021	R$ 16,80	R$ 37,72	R$ 20,62	R$ 39,50	R$ 24,10	R$ 27,09	R$ 29,44	R$ 9,99	R$ 23,10	R$ 75,93
13/01/2021	R$ 16,17	R$ 35,96	R$ 20,70	R$ 37,55	R$ 23,65	R$ 26,68	R$ 29,58	R$ 9,80	R$ 22,82	R$ 74,42
14/01/2021	R$ 16,26	R$ 38,57	R$ 20,55	R$ 37,46	R$ 24,40	R$ 27,50	R$ 29,98	R$ 9,82	R$ 22,88	R$ 75,12
15/01/2021	R$ 15,95	R$ 37,42	R$ 19,94	R$ 36,30	R$ 23,50	R$ 26,74	R$ 29,35	R$ 9,72	R$ 22,19	R$ 71,46
18/01/2021	R$ 16,22	R$ 38,10	R$ 20,27	R$ 35,93	R$ 23,60	R$ 26,83	R$ 29,05	R$ 9,77	R$ 23,07	R$ 72,64
19/01/2021	R$ 16,27	R$ 37,59	R$ 20,20	R$ 35,32	R$ 23,16	R$ 26,40	R$ 28,83	R$ 9,58	R$ 23,79	R$ 71,71
20/01/2021	R$ 16,02	R$ 37,91	R$ 20,00	R$ 34,53	R$ 22,70	R$ 25,85	R$ 28,65	R$ 9,50	R$ 23,48	R$ 70,91
21/01/2021	R$ 15,61	R$ 38,30	R$ 19,37	R$ 34,18	R$ 22,29	R$ 25,48	R$ 28,79	R$ 9,34	R$ 23,21	R$ 71,14
22/01/2021	R$ 15,15	R$ 38,91	R$ 19,52	R$ 33,69	R$ 21,92	R$ 25,01	R$ 28,42	R$ 9,18	R$ 23,22	R$ 70,87
26/01/2021	R$ 15,40	R$ 37,87	R$ 19,77	R$ 32,79	R$ 21,45	R$ 24,41	R$ 28,45	R$ 9,06	R$ 22,88	R$ 70,17
27/01/2021	R$ 15,39	R$ 39,95	R$ 19,66	R$ 33,59	R$ 21,63	R$ 24,80	R$ 28,00	R$ 9,24	R$ 22,53	R$ 67,72

Figura 1: Exemplificação da planilha de cotação de fechamento das ações

ABEV3	AZUL4	B3SA3	BBAS3	BBDC3	BBDC4	BBSE3	BEEF3	BPAC11	BRAP4
-1,086%	-3,995%	-1,613%	-3,119%	-2,479%	-2,616%	-0,810%	-1,375%	-2,223%	4,379%
2,132%	1,246%	0,197%	-1,038%	-0,551%	-0,681%	-1,871%	-1,992%	-1,360%	1,955%
1,518%	-4,031%	-2,177%	2,124%	2,130%	3,124%	-1,630%	-1,524%	-3,463%	4,041%
0,000%	-1,664%	3,363%	4,133%	2,837%	2,844%	2,115%	-0,413%	3,348%	8,279%
2,991%	1,526%	1,473%	0,581%	-0,771%	-0,862%	3,107%	0,829%	2,056%	0,511%
-2,601%	-0,437%	-4,116%	-1,634%	-1,513%	-1,775%	-2,076%	-1,233%	-3,781%	-1,003%
4,348%	3,513%	2,895%	0,920%	0,042%	-0,074%	0,650%	3,954%	4,008%	-0,092%
-3,750%	-4,666%	0,404%	-4,937%	-1,867%	-1,513%	0,476%	-1,902%	-1,212%	-1,989%
0,557%	7,258%	-0,709%	-0,240%	3,171%	3,073%	1,352%	0,204%	0,285%	0,941%
-1,907%	-2,982%	-2,984%	-3,097%	-3,689%	-2,764%	-2,101%	-1,018%	-3,027%	-4,872%
1,693%	1,817%	1,638%	-1,019%	0,426%	0,337%	-1,022%	0,514%	3,966%	1,651%
0,308%	-1,339%	-0,345%	-1,698%	-1,864%	-1,603%	-0,757%	-1,945%	3,121%	-1,280%
-1,537%	0,851%	-0,974%	-2,237%	-1,986%	-2,083%	-0,624%	-0,835%	-1,314%	-1,116%
-2,559%	1,029%	-3,167%	-1,014%	-1,806%	-1,431%	0,489%	-1,684%	-1,150%	0,324%
-2,947%	1,593%	0,775%	-1,434%	-1,660%	-1,845%	-1,285%	-1,713%	0,065%	-0,380%
1,650%	-2,673%	1,281%	-2,671%	-2,144%	-2,399%	0,106%	-1,307%	-1,486%	-0,988%
-0,065%	5,492%	-0,540%	2,440%	0,839%	1,598%	-1,582%	1,987%	-1,530%	-3,492%
0,975%	3,730%	3,917%	2,828%	3,098%	2,944%	0,821%	2,814%	8,801%	-2,555%
-2,767%	-2,654%	-2,431%	-1,969%	-2,960%	-3,094%	-2,019%	-2,316%	-3,040%	-5,274%

Figura 2: Exemplificação da planilha de variação diária das ações

Nas figuras 1 e 2, observa-se exemplos de como são as planilhas das cotações de fechamento das ações e da variação diária em relação ao fechamento do dia anterior. Como a base de dados é muito grande, há apenas uma pequena amostra nas figuras.

Com esses dados da variação diária em relação ao fechamento do dia anterior, é possível calcular a matriz covariância com a ferramenta de cálculo de matriz covariância do Excel. Na figura 3 observa-se uma amostra de como seria a matriz covariância. Não foi possível colocar uma imagem inteira porque o resultado dos cálculos resulta em uma matriz quadrada com o número de linhas e colunas igual a quantidade de ações da carteira teórica do Ibovespa no período selecionado.

	ABEV3	AZUL4	B3SA3	BBAS3	BBDC3	BBDC4	BBSE3	BEEF3	BPAC11	BRAP4	BRDT3	BRFS3	BRKM5	BRML3
ABEV3	0,00038	0,00027	0,00017	0,00024	0,00025	0,00025	0,00013	0,00021	0,00019	0,00016	0,00026	0,00017	0,00014	0,00018
AZUL4	0,00027	0,0011	0,00029	0,00038	0,00034	0,00033	0,00021	0,00016	0,00053	0,0001	0,00046	0,00036	0,00026	0,00043
B3SA3	0,00017	0,00029	0,00041	0,00023	0,00021	0,0002	0,00015	0,00012	0,00037	0,00015	0,00026	0,00019	7,1E-05	0,00026
BBAS3	0,00024	0,00038	0,00023	0,00061	0,00041	0,00043	0,00021	0,0002	0,00031	0,00023	0,00033	0,00037	0,00019	0,00024
BBDC3	0,00025	0,00034	0,00021	0,00041	0,00046	0,00046	0,0002	0,00017	0,00026	0,00023	0,00027	0,00028	0,00018	0,00022
BBDC4	0,00025	0,00033	0,0002	0,00043	0,00046	0,00047	0,00019	0,00018	0,00024	0,00023	0,00027	0,00029	0,00018	0,00021
BBSE3	0,00013	0,00021	0,00015	0,00021	0,0002	0,00019	0,00021	5,8E-05	0,00022	0,00015	0,00019	0,00011	9,5E-05	0,00018
BEEF3	0,00021	0,00016	0,00012	0,0002	0,00017	0,00018	5,8E-05	0,00066	5,8E-05	0,00022	0,00015	0,00019	0,00011	9,5E-05
BPAC11	0,00019	0,00053	0,00037	0,00031	0,00026	0,00024	0,00022	5,8E-05	0,00081	0,0002	0,00028	0,00022	0,00021	0,00038
BRAP4	0,00016	0,0001	0,00015	0,00023	0,00023	0,00023	0,00015	0,00022	0,0002	0,00078	7,7E-05	0,00012	0,00013	2,2E-05
BRDT3	0,00026	0,00046	0,00026	0,00033	0,00027	0,00027	0,00019	0,00015	0,00028	7,7E-05	0,00071	0,00022	0,00014	0,00034
BRFS3	0,00017	0,00036	0,00019	0,00037	0,00028	0,00029	0,00011	0,00019	0,00022	0,00012	0,00022	0,00059	0,00024	0,00024
BRKM5	0,00014	0,00026	7,1E-05	0,00019	0,00018	0,00018	9,5E-05	0,00011	0,00021	0,00013	0,00014	0,00024	0,00076	9,4E-05
BRML3	0,00018	0,00043	0,00026	0,00024	0,00022	0,00021	0,00018	9,5E-05	0,00038	2,2E-05	0,00034	0,00024	9,4E-05	0,00056
BTOW3	0,0001	0,00043	0,00016	-8,4E-06	-5,5E-05	-7,6E-05	0,00017	0,00018	0,00034	-0,00012	0,00018	-5,3E-06	7,2E-05	0,00027

Figura 3: Exemplificação da matriz covariância

Com todos esses dados da variação diária em relação ao fechamento do dia anterior foi possível calcular a variação média da carteira no período fazendo a multiplicação da Matriz das variações diárias médias pela matriz da alocação da carteira. E para obter o desvio padrão diário da carteira, utiliza-se a formula raiz(matriz.mult(matriz.mult(transpor(carteira);MatrizCovariancia)). Por conseguinte, o solver foi utilizado para retornar a carteira ótima. Sendo que as únicas restrições implantadas no solver é que é desejado minimizar o desvio padrão, a soma total da alocação da carteira deve ser igual a 100%, retorno diário médio da carteira deve ser igual ao retorno diário médio do Ibovespa no período anterior e caso o retorno do Ibovespa no período anterior seja negativo, o objetivo de retorno da carteira passa a ser zero.

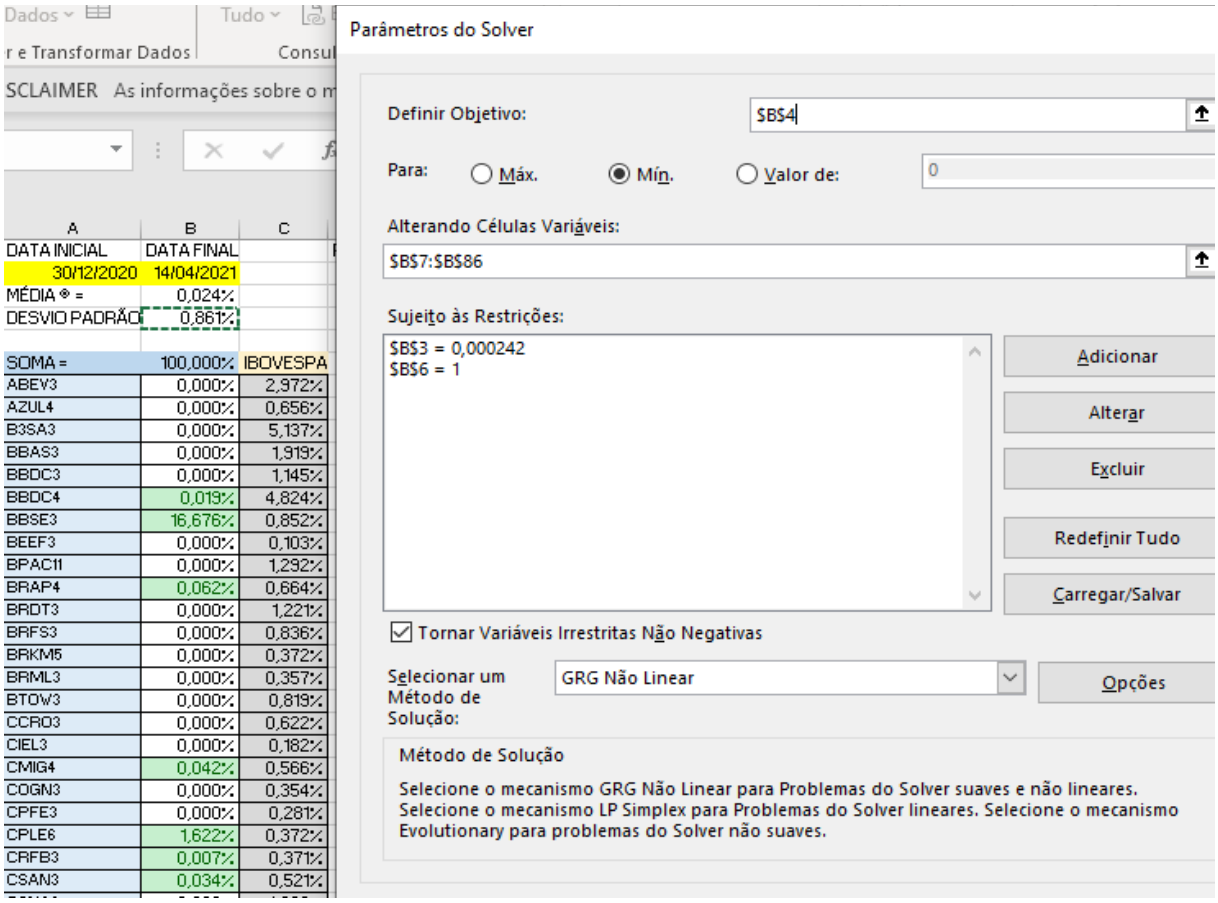

Figura 4: Configurações do Solver

A figura 4 mostra o layout da planilha que foi utilizada para fazer o cálculo das carteiras ótimas e as configurações que foram utilizadas no solver para obter esses resultados. Além disso, foi feito uma comparação da carteira teórica do Ibovespa e da carteira ótima obtida, nessa imagem é possível ver uma boa diferença em relação a alocação das duas carteiras, haja vista que, a carteira ótima tem o mesmo retorno com menor risco e menor número de ativos.

Esses mesmos passos são feitos para os períodos de maio à agosto de 2020, setembro a dezembro de 2020 e janeiro à abril de 2021. Fazendo o back testing nos períodos seguintes, ou seja, maio à agosto de 2020, setembro à dezembro de 2020, janeiro à abril de 2021 e maio à agosto de 2021, utilizando sempre como referência a carteira teórica do Ibovespa do período anterior.

Essas carteiras ótimas foram utilizadas para fazer o back testing e saber como seria o desempenho delas no período seguinte. Para obter a variação diária em reação ao dia anterior dessa carteira no período seguinte ao período utilizado para calcular a carteira ótima, multiplica - se a matriz das variações diárias do período seguinte pela matriz da carteira ótima no período anterior. Fazendo isso com todas as carteiras obtêm-se a variação da carteira ótima de cada dia durante todo o período de estudo, possibilitando construir o gráfico da figura 5.

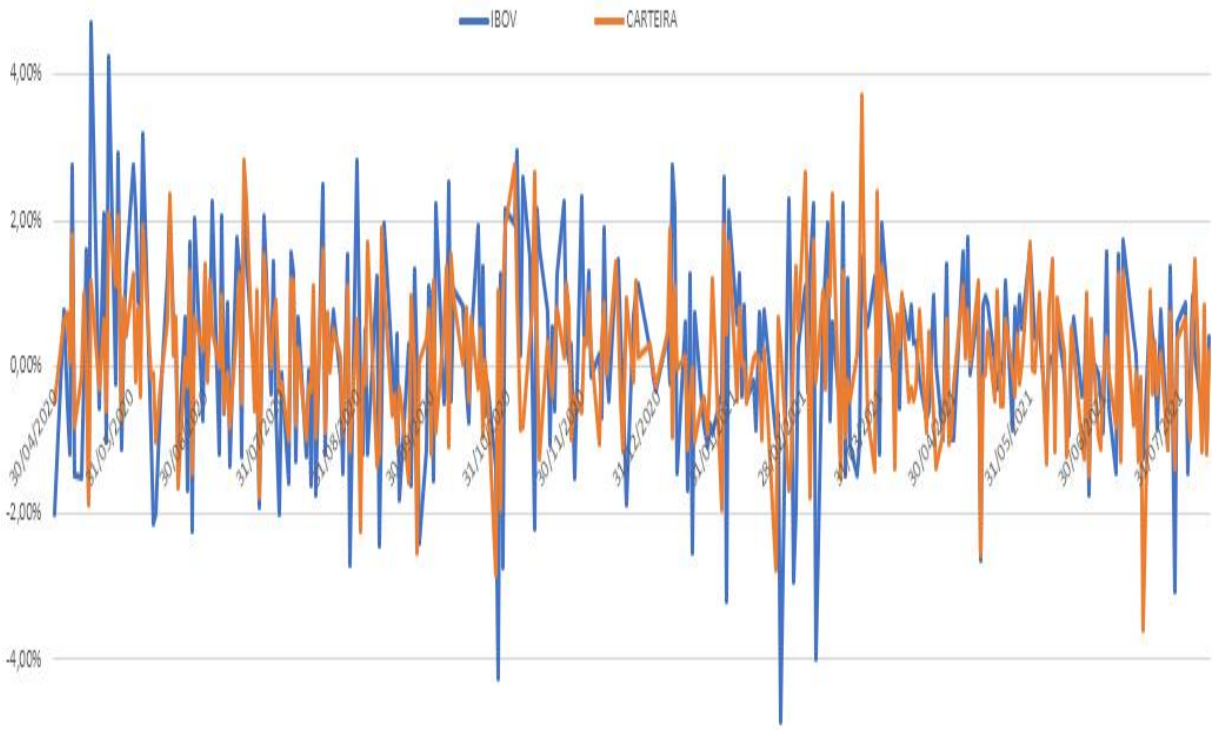

Figura 5: Variação diária da carteira e do Ibovespa

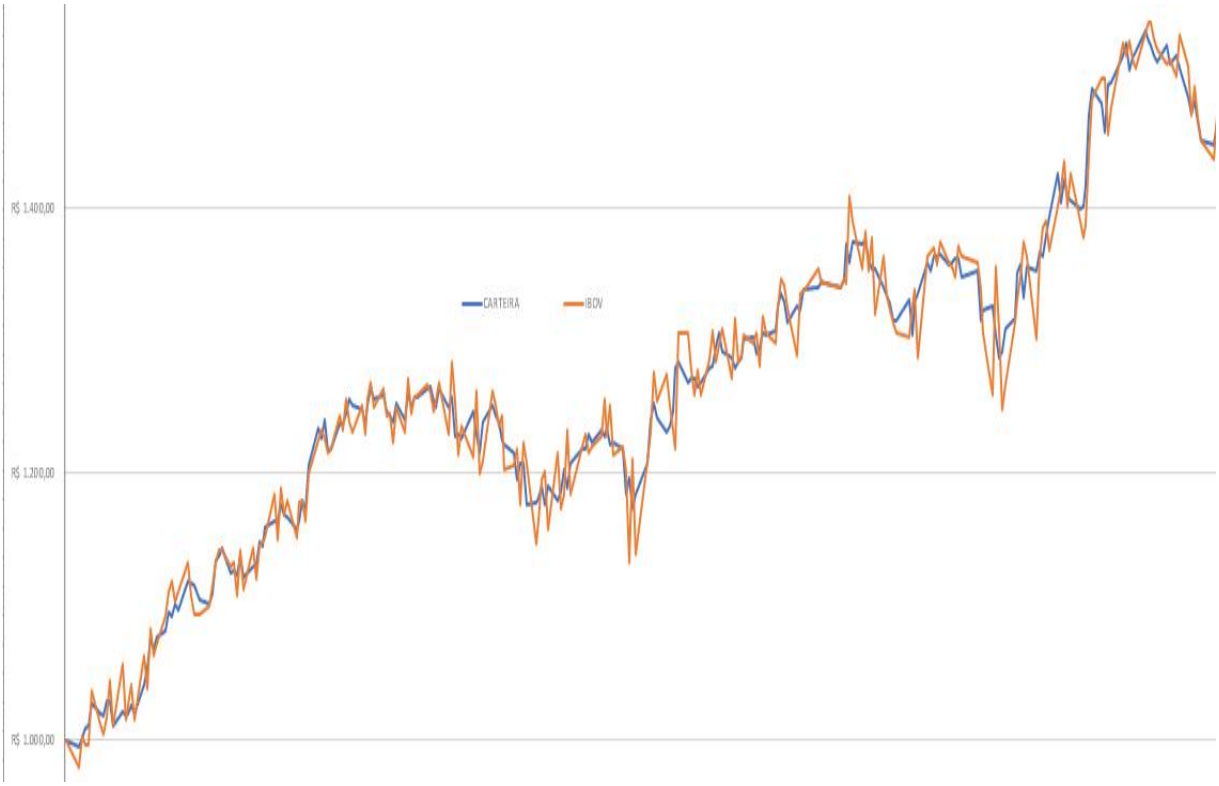

Figura 6: Gráfico da evolução patrimonial das duas carteiras dado aporte inicial de R$ 1.000,00

Com a variação diária da carteira, é possível fazer uma comparação com a variação diária média do Ibovespa no mesmo período resultando no gráfico da figura 5. E o gráfico da figura 6 é uma comparação do patrimônio de uma carteira que começou investindo R$ 1.000,00, nas duas carteiras.

4. RESULTADO E DISCUSSÃO

Essa é a carteira ótima obtida em cada período selecionado;

INÍCIO	FIM
JAN/20	ABR/20
ABEV3	0,000%
AZUL4	0,000%
B3SA3	1,779%
BBAS3	0,000%
BBDC3	0,000%
BBDC4	0,005%
BBSE3	0,404%
BPAC11	0,000%
BRAP4	4,329%
BRDT3	0,000%
BRFS3	0,683%
BRKM5	0,267%
BRML3	0,000%
BTOW3	3,977%
CCRO3	0,124%
CIEL3	0,000%
CMIG4	0,000%
COGN3	0,000%
CRFB3	5,838%
CSAN3	0,371%
CSNA3	0,000%
CVCB3	0,000%
CYRE3	0,000%
ECOR3	0,000%
EGIE3	8,553%
ELET3	0,000%
ELET6	0,000%
EMBR3	0,033%
ENBR3	4,442%
EQTL3	0,910%
FLRY3	5,055%
GGBR4	0,000%
GNDI3	1,638%
GOAU4	0,000%
GOLL4	0,000%

INÍCIO	FIM
MAI/20	AGO/20
ABEV3	0,000%
AZUL4	0,000%
B3SA3	0,000%
BBAS3	0,000%
BBDC3	0,000%
BBDC4	0,000%
BBSE3	0,000%
BEEF3	3,314%
BPAC11	0,000%
BRAP4	1,103%
BRDT3	0,000%
BRFS3	0,000%
BRKM5	0,000%
BRML3	0,000%
BTOW3	0,619%
CCRO3	0,000%
CIEL3	0,000%
CMIG4	0,000%
COGN3	0,000%
CPFE3	0,000%
CRFB3	0,000%
CSAN3	0,000%
CSNA3	0,000%
CVCB3	0,000%
CYRE3	0,000%
ECOR3	0,000%
EGIE3	5,110%
ELET3	0,000%
ELET6	0,000%
EMBR3	0,000%
ENBR3	0,000%
ENGI11	0,000%
EQTL3	0,000%
FLRY3	6,583%
GGBR4	0,000%

INÍCIO	FIM
SET/21	DEZ/21
ABEV3	0,003%
AZUL4	0,000%
B3SA3	0,000%
BBAS3	0,000%
BBDC3	0,000%
BBDC4	0,005%
BBSE3	0,000%
BEEF3	0,000%
BPAC11	0,000%
BRAP4	0,565%
BRDT3	0,000%
BRFS3	1,394%
BRKM5	0,000%
BRML3	0,000%
BTOW3	0,000%
CCRO3	0,000%
CIEL3	0,000%
CMIG4	0,000%
COGN3	0,000%
CPFE3	1,565%
CRFB3	0,852%
CSAN3	0,000%
CSNA3	1,117%
CVCB3	0,000%
CYRE3	0,000%
ECOR3	0,000%
EGIE3	0,000%
ELET3	0,000%
ELET6	0,000%
EMBR3	0,000%
ENBR3	0,000%
ENGI11	0,000%
EQTL3	0,000%
EZTC3	0,000%
FLRY3	0,715%

INÍCIO	FIM
JAN/21	ABR/21
ABEV3	0,000%
AZUL4	0,000%
B3SA3	0,000%
BBAS3	0,000%
BBDC3	0,000%
BBDC4	0,019%
BBSE3	16,676%
BEEF3	0,000%
BPAC11	0,000%
BRAP4	0,062%
BRDT3	0,000%
BRFS3	0,000%
BRKM5	0,000%
BRML3	0,000%
BTOW3	0,000%
CCRO3	0,000%
CIEL3	0,000%
CMIG4	0,042%
COGN3	0,000%
CPFE3	0,000%
CPLE6	1,622%
CRFB3	0,007%
CSAN3	0,034%
CSNA3	0,000%
CVCB3	0,000%
CYRE3	0,000%
ECOR3	0,000%
EGIE3	0,049%
ELET3	0,000%
ELET6	0,033%
EMBR3	0,000%
ENBR3	8,343%
ENEV3	0,000%
ENGI11	0,000%
EQTL3	1,987%

HAPV3	2,380%
HGTX3	0,000%
HYPE3	1,831%
IGTA3	0,000%
IRBR3	0,000%
ITSA4	0,000%
ITUB4	0,000%
JBSS3	3,743%
KLBN11	11,334%
LAME4	0,372%
LREN3	0,728%
MGLU3	0,048%
MRFG3	5,618%
MRVE3	0,000%
MULT3	0,000%
NTCO3	1,106%
PETR3	0,310%
PETR4	0,000%
QUAL3	0,075%
RADL3	10,167%
RAIL3	0,088%
RENT3	0,361%
SANB11	0,000%
SBSP3	0,000%
SULA11	0,115%
SUZB3	0,042%
TAEE11	0,116%
TIMS3	3,364%
TOTS3	1,024%
UGPA3	0,219%
USIM5	0,000%
VALE3	4,308%
VIVT3	7,649%
VVAR3	1,123%
WEGE3	5,473%
YDUQ3	0,000%

GNDI3	0,003%
GOAU4	0,004%
GOLL4	0,000%
HAPV3	3,138%
HGTX3	0,000%
HYPE3	0,000%
IGTA3	0,000%
IRBR3	0,598%
ITSA4	0,000%
ITUB4	0,000%
JBSS3	0,000%
KLBN11	10,151%
LAME4	0,007%
LREN3	0,000%
MGLU3	1,442%
MRFG3	10,899%
MRVE3	0,000%
MULT3	0,000%
NTCO3	0,000%
PETR3	0,000%
PETR4	0,000%
QUAL3	0,000%
RADL3	0,000%
RAIL3	0,000%
RENT3	0,000%
SANB11	0,000%
SBSP3	0,000%
SULA11	0,002%
SUZB3	0,299%
TAEE11	32,584%
TIMS3	2,701%
TOTS3	10,733%
UGPA3	0,000%
USIM5	0,000%
VALE3	7,544%
VIVT3	0,000%
VVAR3	0,646%
WEGE3	2,520%
YDUQ3	0,000%

GGBR4	0,000%
GNDI3	0,000%
GOAU4	0,000%
GOLL4	0,000%
HAPV3	0,000%
HGTX3	0,000%
HYPE3	0,000%
IGTA3	0,000%
IRBR3	0,000%
ITSA4	0,030%
ITUB4	1,590%
JBSS3	1,503%
KLBN11	0,000%
LAME4	0,000%
LREN3	0,000%
MGLU3	3,451%
MRFG3	4,966%
MRVE3	0,000%
MULT3	0,000%
NTCO3	0,000%
PETR3	0,000%
PETR4	0,000%
PRIO3	0,000%
QUAL3	0,000%
RADL3	0,475%
RAIL3	0,000%
RENT3	2,479%
SANB11	0,057%
SBSP3	0,000%
SULA11	0,644%
SUZB3	0,212%
TAEE11	45,080%
TIMS3	0,000%
TOTS3	0,000%
UGPA3	0,000%
USIM5	0,000%
VALE3	20,033%
VIVT3	13,264%
VVAR3	0,000%
WEGE3	0,000%
YDUQ3	0,000%

EZTC3	0,000%
FLRY3	0,051%
GGBR4	2,808%
GNDI3	0,000%
GOAU4	0,000%
GOLL4	0,000%
HAPV3	0,000%
HGTX3	0,000%
HYPE3	0,000%
IGTA3	0,000%
IRBR3	0,000%
ITSA4	0,626%
ITUB4	0,000%
JBSS3	1,763%
JHSF3	0,000%
KLBN11	10,842%
LAME4	5,115%
LCAM3	0,000%
LREN3	0,000%
MGLU3	0,204%
MRFG3	10,198%
MRVE3	0,000%
MULT3	0,000%
NTCO3	0,000%
PETR3	0,000%
PETR4	0,000%
PRIO3	0,071%
QUAL3	0,026%
RADL3	0,022%
RAIL3	0,000%
RENT3	0,000%
SANB11	0,000%
SBSP3	0,074%
SULA11	0,000%
SUZB3	6,264%
TAEE11	0,000%
TIMS3	0,000%
TOTS3	0,000%
UGPA3	0,000%
USIM5	0,000%
VALE3	0,679%
VIVT3	32,384%
VVAR3	0,000%
WEGE3	0,000%
YDUQ3	0,000%

Figura 7: Carteiras ótimas

Mesmo considerando que em 2020 houve uma grande queda nos valores das ações enquanto no periodo de 2021, analisado, foi observado que o mercado de ações teve um comportamento mais estável, as carteiras geradas com os dados de cada quadrimestre entre 2020 e 2021 tiveram um risco muito menor que o risco da carteira teórica do Ibovespa nesse mesmo período, como é possível observar no gráfico das variações diárias das carteiras no período (figura 5). Assim, como é possível observar no gráfico do patrimônio das duas carteiras (figura 6), a carteira ótima acompanha o Ibovespa com muito menos volatilidade e entregando o mesmo resultado. Pode-se observar que há dias que a carteira do Ibovespa chega a cair mais do que a carteira ótima e observa-se que a carteira do Ibovespa tem uma variância e desvio padrão maior. Além disso em alguns períodos a carteira ótima teve uma rentabilidade média até maior do que a carteira do Ibovespa, em todo este período estudado a carteira ótima teve um desvio padrão de 1,05%, já o Ibovespa teve desvio padrão de 1,39%. Ou seja, a carteira teve um risco bem menor e uma rentabilidade muito próxima à da carteira do Ibovespa. Portanto, ao calcular o índice Sharpe da carteira entre janeiro de 2020 e agosto de 2021, o índice Sharpe da carteira ótima foi de 0.17, muito melhor que o da carteira do Ibovespa (0.11). Além disso, a carteira ótima teve uma quantidade média de ações muito menor que a do Ibovespa, diminuído os custos de corretagens e de balanceamento da carteira, o que seria ótimo para um fundo de gestão passiva.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo acadêmico apresenta uma aplicação da teoria de Markowitz na criação de carteiras racionais de carteiras de ações, em quatro períodos distintos, considerando o período de pandemia. Ademais foi apresentado que, apesar de haver eventos que podem influenciar diretamente no mercado de ações e que não podem ser previstos estatisticamente, os modelos matemáticos que consideram dados históricos passados para a criação de carteiras com o objetivo de criar carteiras que tenham bons desempenhos no futuro, continuam sendo considerados. Baseado no modelo de Markowitz, foram criadas carteiras teóricas das ações componentes do índice IBOVESPA em 2020 e 2021 e usados os dados dos valores das ações para avaliar qual seria o desempenho dessas carteiras nos períodos seguintes. As ações que compõem o Ibovespa apresentam liquidez, facilitando a estrutura de diversificação do portfólio proposto por Markowitz. É possível atestar a eficiência do modelo de Markowitz para a criação de carteiras racionais e eficientes tendo sido possível analisar ainda que o comportamento dos ativos financeiros ficou muito próximo ao previsto.

Este estudo é importante sob muitos aspectos. O primeiro está relacionado a gestão de recursos. A vantagem dessa teoria é que ela pode ser aplicada por qualquer investidor, sem precisar utilizar softwares específicos. O segundo é que se demostrou a possibilidade de construir um portfólio com número menor de ativos e com o retorno superior ao Ibovespa. Essa rentabilidade pode ser maior se for considerado os custos de negociação na realocação do portifólio, haja vista que a carteira do Ibovespa possui um número superior de ações. Sob o aspecto acadêmico este estudo acadêmico colabora com outros estudos sobre o mercado brasileiro. Futuros estudos poderão abordar as restrições abordadas na seleção dos ativos e apontar qual delas é mais relevante, além de levar em consideração a curva de indiferença de cada investidor. Finalmente, o prazo deve ser estendido a fim de alcançar um resultado mais confiável, haja vista que um período mais longo será preferível para diminuir o risco de erro e para obter um resultado mais confiável.

6. REFERÊNCIAS

STUMPF, Kleber. Risco de Carteira. Topinvest. São Paulo. 07 nov. 2019. Disponível em: https://www.topinvest.com.br/risco-de-carteira/. Acesso em: 11 mar. 2021.

MAISRETORNO. Variância. Maisretorno. São Paulo. 15 jul. 2020. Disponível em: https://maisretorno.com/portal/termos/v/variancia. Acesso em: 12 mar. 2021.

Capital. Covariância: o que é e como funciona? Capital Now. São Paulo, p. 0-2. 24 abr. 2020. Disponível em: https://www.capitalresearch.com.br/blog/investimentos/covariancia/. Acesso em: 15 mar. 2021.

Composição da carteira. B3. São Paulo, mar. 2021. Disponível em: http://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-amplos/indice-ibovespa-ibovespa-composicao-da-carteira.htm. Acesso em: 21 agos. 2021.

Sharpe W. F. (2000). Portfolio Theory and Capital Markets. McGraw-Hill, New York.

Markowitz H. M. (1959). Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments. John Wiley & Sons, New York.

Litterman, B. (2003). The Quantitative Resource Group, Modern investment management. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Bodie Z., Kane A., & Marcus A.J. (2001). Finance Investments – Finance – 5th edition. McGrawHill.

Grinold, C, R. (1989). The Fundamental Law of Active Management. Journal of portfolio management. Vol. 15, 3, ABI/INFORM Global p. 30.

O'Neill, W. (2000). Fundamentals of the Stock Market. Blacklick, OH, USA: McGraw-Hill Professional Book Group.

Elton E.J., & Gruber M. J. (1997). Modern Portfolio Theory 1950 to Date. Journal of Banking & Finance 21, pp 1743-1759.

Hagstrom, R. G. Jr. (2001). The Essential Buffett: Timeless Principles for the New Economy. John Wiley & Sons, New York.

Campbell J. Y. & Viceira L. M. (2002). Strategic Asset Allocation. Oxford University Press.

ALMONACID, Gustavo Alberto. Aplicabilidade da Teoria de Markowitz para Investimentos em Ativos do Real Estate: Estudo de Caso de uma Carteira Mista. 2010. 76 f. Monografia (Especialização) - Curso de Economia Setorial e Mercados, Usp, São Paulo, 2010. Disponível em: http://www.poli-integra.poli.usp.br/library/pdfs/249fee405c13d0b35a3b86597c792873.pdf. Acesso em: 15 mar. 2021.

Contatos: romullor10@gmail.com e agostinhocelso.pascalichio@mackenzie.br