

## **ESTUDO DO EFEITO DÍNAMO NAS EQUAÇÕES DA MAGNETOHIDRODINÂMICA (MHD) COM FORÇANTE EXTERNA DO TIPO ROBERTS**

Douglas de Lima (IC) e José Ignacio Hernández López (Orientador)

Apoio: PIBIC Mackenzie

### **RESUMO**

Este estudo pode elevar o nível de conhecimento do orientando na área da magnetohidrodinâmica e suas causas além de conhecimentos na área de pesquisa científica, já que, por definição, um dos aspectos mais importantes da ciência é a repetibilidade de um processo. Ao se entender como e porque o efeito dínamo ocorre, poder-se-á prever suas consequências e, possivelmente, utilizá-las para fins úteis.

**Palavras-chave:** Efeito dínamo. Magnetohidrodinâmica. Forçante externa.

### **ABSTRACT**

This study may raise the level of knowledge of guiding in the area of magnetohydrodynamics and their causes as well as expertise in the area of scientific research, since, by definition, one of the most important aspects of science is the repeatability of a process. To understand how and why the dynamo effect occurs, it may be envisaged consequences and possibly use them for useful purposes.

**Keywords:** Dynamo effect. Magnetohydrodynamics. Forcing Foreign.

## INTRODUÇÃO

Magnetohidrodinâmica (MHD) é o estudo da evolução do campo magnético e do movimento de fluidos condutores, tais como os plasmas (estado físico da matéria), metais liquefeitos ou soluções iônicas.

O estudo da Magnetohidrodinâmica teve início com Hannes Alfvén, que utilizou o termo pela primeira vez em 1942, Hannes foi agraciado com o prêmio Nobel de física de 1970.

A ideia chave da MHD é que campos magnéticos possam induzir correntes em um fluido condutor, que criam aquecimento e movimento no fluido e tais fenômenos alteram o campo magnético novamente. A Magnetohidrodinâmica é essencialmente uma teoria da mecânica do contínuo, ou seja, trata-se de um fluido contínuo e com partículas discretas.

Os campos de interesse na MHD são os campos vetoriais velocidade e campo magnético, e os campos escalares, densidade e temperatura de prótons e elétrons. Se nos ativermos a um destes campos específicos ( campo magnético ou velocidade), podemos identificar estruturas interplanetárias como os setores solares, os feixes correntes e a lâmina de corrente Heliosférica (LCH).

Este projeto teve como objetivo analisar e reproduzir o estudo realizado no artigo Low dimensional dynamo modelling and symmetry-breaking bifurcations. Este artigo faz uma análise à fundo da geração e amplificação de campos magnéticos (i.e Efeito Dínamo) no escoamento que foi denominado do tipo Roberts.

## REFERENCIAL TEÓRICO

J. LARMOR (1919) define que o princípio do experimento dínamo de duas escalas no Forschungszentrum Karlsruhe está intimamente relacionado com que Roberts trabalha com um fluxo de fluido que é simples, no que diz respeito a um plano cartesiano, adequada as coordenadas  $x$ ,  $y$ , e  $z$ , e periódicos em  $X$  e  $Y$  e independentes de  $z$ . Um problema modificado é considerado com um fluxo mais semelhante ao que no dispositivo experimental. Soluções são calculados numericamente, e sobre esta base, uma estimativa do estado de excitação do dínamo experimental é dada. Também é considerado no âmbito da teoria dínamo de campo médio, em que o efeito de indução crucial do movimento do fluido é um efeito anisotrópico. Os resultados numéricos são indicados para a dependência dos coeficientes de campo médio sobre as taxas de fluxo do fluido. A condição de excitação do dínamo é também discutida neste âmbito. O comportamento do dínamo no regime não-linear, isto é, com backreaction do campo magnético sobre o fluxo do fluido, o efeito depende da força de Lorentz nas taxas de

fluxo. As quantidades que determinam este efeito são calculados numericamente. Os resultados para os coeficientes de campo médio e as quantidades que descrevem o backreaction fornecem correções aos resultados anteriores, que foram obtidos no âmbito da simplificação de certas premissas.

## METODOLOGIA

A proposta era resolver as equações da magnetohidrodinâmica com o auxílio de técnicas numéricas, já que a grande quantidade de variáveis envolvidas tornam o modelo inviável de se resolver por métodos analíticos.

Esta análise se deu através do uso do software FreeFEM, um software para análise e solução de equações diferenciais parciais tanto em 2D quanto em 3D. Outro software a ser utilizado, foi o Matlab, um programa que permite mais fácil manipulação de matrizes e dados e que também possui a opção de integração entre programas, tornando-o ainda mais útil para este projeto.

A estrutura matemática da teoria do dínamo é dada em termos de um sistema de equações diferenciais parciais não lineares acopladas. No caso de um fluido incompressível (densidade constante através do sistema) não relativista. Este conjunto pode ser reduzido para quatro equações, as equações magneto resistivo, que contém a equação de Navier-Stokes e a equação de indução como equações evolutivas acopladas para a velocidade do fluido  $\vec{u}(x,t)$  e do campo magnético  $\vec{B}(x,t)$  além de duas restrições adicionais.

Na forma adimensional, estas equações são:

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = Re^{-1} \nabla^2 \vec{u} - \nabla P + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{f}$$

$$\partial_t \vec{B} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} = Rm^{-1} \nabla^2 \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u}$$

Onde  $\vec{u}$  é, neste caso, o campo tridimensional de velocidades do fluido.  $\vec{B}$ , por sua vez, é o campo tridimensional magnético do sistema.  $\partial_t \vec{u}$  é a derivada parcial em função do tempo da velocidade.  $Re$  é o número de Reynolds que é definido pela equação  $Re = uL/\nu$  que, por sua vez, possui os elementos  $L$  que é um comprimento característico do fluido e  $\nu$  que é a viscosidade cinemática do fluido. O número de Reynolds é adimensional e é usado em mecânica dos fluidos para o cálculo do regime de escoamento de determinado fluido sobre uma superfície. É utilizado por exemplo, em projetos de tubulações industriais e também em asas de aviões.  $P$  é a soma das pressões cinemática e magnética e pode ser escrita da forma  $P = p + B^2/2$  onde  $p$  seria a contribuinte cinemática.  $\vec{f}$  é a força externa do tipo Roberts.

Essa força é utilizada para compensar as perdas viscosas inerentes à movimentação do fluido e para que o escoamento de Roberts seja uma solução estacionária da equação de Navier Stokes.  $\partial_t \vec{B}$  é a derivada parcial em função do tempo do campo magnético.

Por fim,  $Rm$  é o chamado número de Reynolds Magnético e é definido pela equação  $Rm = uL/h$ , onde  $h$  é a difusividade magnética. O número de Reynolds magnético fornece uma estimativa dos efeitos da advecção magnética para a difusão magnética.

Quanto às restrições temos,

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Já que o sistema é assumido que o fluido condutivo é incompressível.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A seguir seguem as demonstrações envolvidas das equações da Magnetohidrodinâmica utilizadas no projeto e também no artigo.

$$(1) \partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = Re^{-1} \nabla^2 \vec{u} - \nabla P + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{f}$$

$$(2) \partial_t \vec{B} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} = Rm^{-1} \nabla^2 \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u}$$

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

(1) Demonstração, com algumas passagens omitidas, não sendo necessárias na elaboração do projeto, devido sua complexidade.

Obs: letras em negrito indica vetor.

$$\vec{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

$$\partial_t \vec{u} = [(\partial u / \partial t), (\partial v / \partial t), (\partial w / \partial t)]$$

Admitindo sistema incompressível:

$$\nabla \cdot \vec{u} = (\partial u / \partial x) + (\partial v / \partial y) + (\partial w / \partial z) = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = (\partial B / \partial x) + (\partial B / \partial y) + (\partial B / \partial z) = 0$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = (\partial u / \partial x) + (\partial v / \partial y) + (\partial w / \partial z) \cdot u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$$

$$(\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = (\partial u / \partial x) + (\partial v / \partial y) + (\partial w / \partial z)$$

$$Re^{-1} = (1/Re) = (1/(1/\nu)) = \nu$$

$$\nabla^2 \vec{u} = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2) + (\partial^2 / \partial z^2)$$

$$\nabla P = [(\partial P / \partial x)\mathbf{i} + (\partial P / \partial y)\mathbf{j} + (\partial P / \partial z)\mathbf{k}]$$

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = (\partial B / \partial x) + (\partial B / \partial y) + (\partial B / \partial z) \cdot (B_x \mathbf{i} + B_y \mathbf{j} + B_z \mathbf{k})$$

$$(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} = (\partial B / \partial x) + (\partial B / \partial y) + (\partial B / \partial z)$$

O termo  $f^{\rightarrow}$  mencionado anteriormente é a forçante do tipo Roberts.

Essa forçante é representada pela equação:  $f^{\rightarrow} = -\nabla^2 \vec{u} R = 2 \vec{u} R$

Substituindo e diferenciando essas equações diferenciais parciais não-lineares, chegamos na chamada equação da magnetohidrodinâmica para a velocidade:

$$\partial t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = Re^{-1} \nabla^2 \vec{u} - \nabla P + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} + f^{\rightarrow}$$

(2) Demonstração, com algumas passagens omitidas, não sendo necessárias na elaboração do projeto, devido sua complexidade.

Obs: letras em negrito indica vetor.

$$\partial t \vec{B} = [(\partial B / \partial t), (\partial B / \partial t), (\partial B / \partial t)]$$

$$Rm^{-1} = (1/Rm) = (1/(1/\eta)) = \eta$$

$$\nabla^2 \vec{B} = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2) + (\partial^2 / \partial z^2)$$

$$(\partial B / \partial t), (\partial B / \partial t), (\partial B / \partial t) = \eta \cdot (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2) + (\partial^2 / \partial z^2)$$

Substituindo e diferenciando essas equações diferenciais parciais não-lineares, chegamos na chamada equação da magnetohidrodinâmica para o campo magnético:

$$\partial t \vec{B} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{B} = Rm^{-1} \nabla^2 \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{u}$$

Demonstração da equação da forçante externa do tipo Roberts.

$$(3) \vec{f} = -\nabla^2 \vec{u}^R = 2 \vec{u}^R$$

$$\vec{u}^R(x,y) = (\sin x \cos y, -\cos x \sin y, 2 \sin x \sin y)$$

Fazendo:

$$\sin x \cos y = u^R_1$$

$$-\cos x \sin y = u^R_2$$

$$2 \sin x \sin y = u^R_3$$

$$\nabla^2 \vec{u}^R = (\nabla^2 u^R_1, \nabla^2 u^R_2, \nabla^2 u^R_3)$$

$$\nabla^2 (\vec{f}) = (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2})$$

\*

\*\*

\*\*\*

$(\frac{\partial^2}{\partial z^2}) = 0$  pois o vetor está só no plano xy.

$$\begin{aligned} * \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sin x \cos y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sin x \cos y) &= -\sin x \cos y - \sin x \cos y = \\ &= -(\sin x \cos y + \sin x \cos y) = -2 \sin x \cos y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ** \frac{\partial^2}{\partial x^2}(-\cos x \sin y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(-\cos x \sin y) &= \\ \cos x \sin y + \cos x \sin y &= 2 \cos x \sin y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} *** \frac{\partial^2}{\partial x^2}(2 \sin x \sin y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(2 \sin x \sin y) &= -2 \sin x \sin y - 2 \sin x \sin y = \\ -2(2 \sin x \sin y) &= -4 \sin x \sin y \end{aligned}$$

Portanto, substituindo na equação da forçante externa:

$$(2 \sin x \cos y), (-2 \cos x \sin y), (2 \cdot 2 \sin x \sin y)$$

Fazendo:

$$2\sin x \cdot \cos y = 2 u^{\vec{R}} R_1$$

$$-2 \cos x \cdot \sin y = 2 u^{\vec{R}} R_2$$

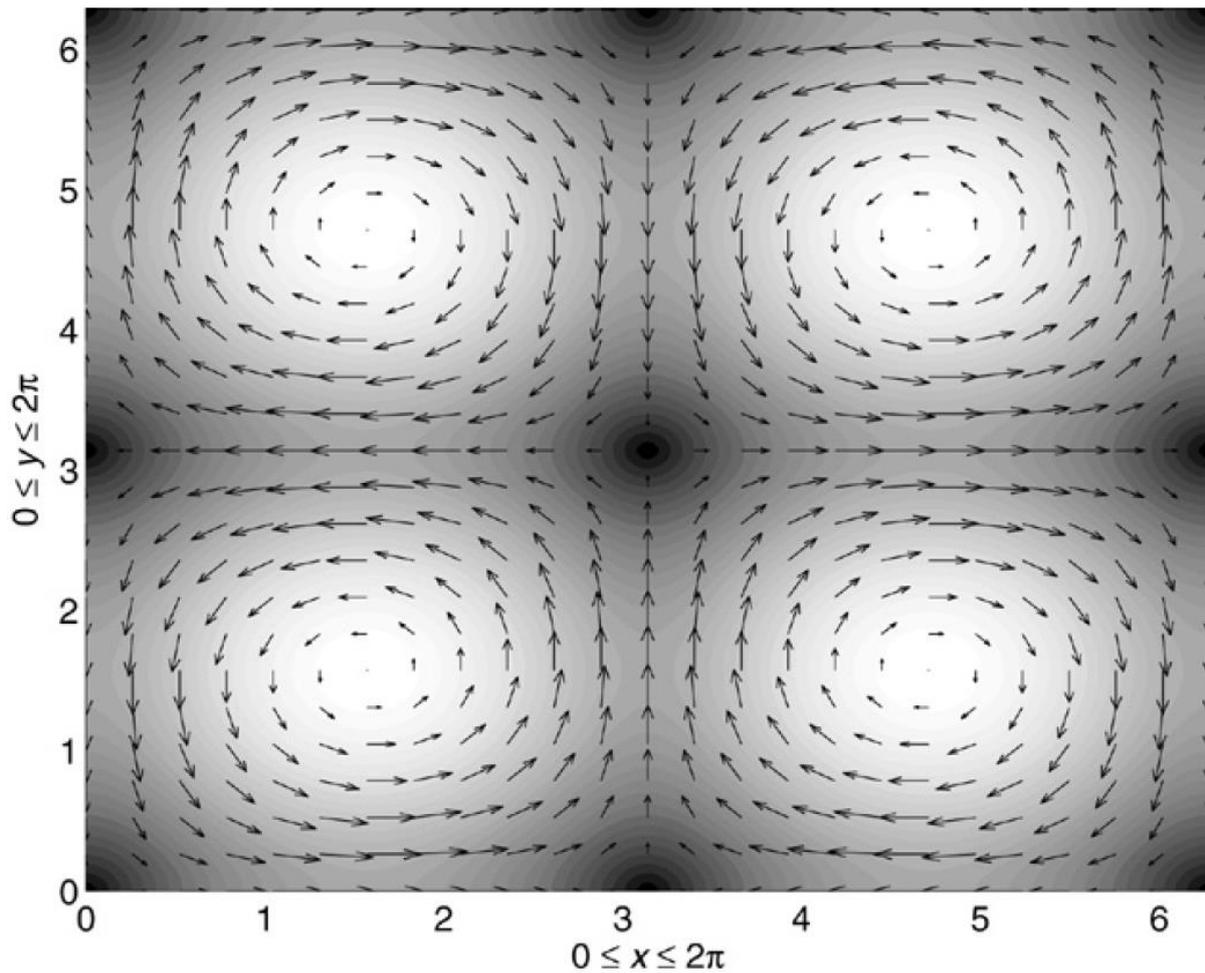
$$2.2 \cdot \sin x \cdot \sin y = 2 u^{\vec{R}} R_3$$

$$\text{Temos a equação: } -\nabla^2 u^{\vec{R}} = 2 u^{\vec{R}}$$

Outras considerações a serem tomadas quanto ao equacionamento do sistema são que para efeito de simplificação,  $n = h$  (i.e.  $Re = Rm$ ), o que gera um número de Prandtl magnético  $Pm = n\eta$  equivalente a 1. Essa proposição é validada pelo fato de que pequenas escalas do campo de velocidades tem apenas uma pequena influência na geração de campo magnético no dínamo de Roberts.

Vale a pena ressaltar que, apesar de ser um campo tridimensional, o escoamento do tipo Roberts apresenta dependência apenas das coordenadas  $x$  e  $y$  do plano cartesiano, é dito, desta forma, que as velocidades são constantes ao longo do eixo  $z$ . Deste forma, é possível que se faça uma representação precisa do campo em apenas um plano, como mostrado no gráfico abaixo:

Figure 1 - Projeção do fluxo de Roberts



Fonte: DONNER, R., 2006, p. 2.

Essa projeção do fluxo de Roberts se dá no plano x-y com flechas indicando a direção horizontal do vetor velocidade do fluido. A escala de tons de cinza representa o valor absoluto (i. e. módulo) do vetor, onde áreas mais claras correspondem a valores mais elevados.

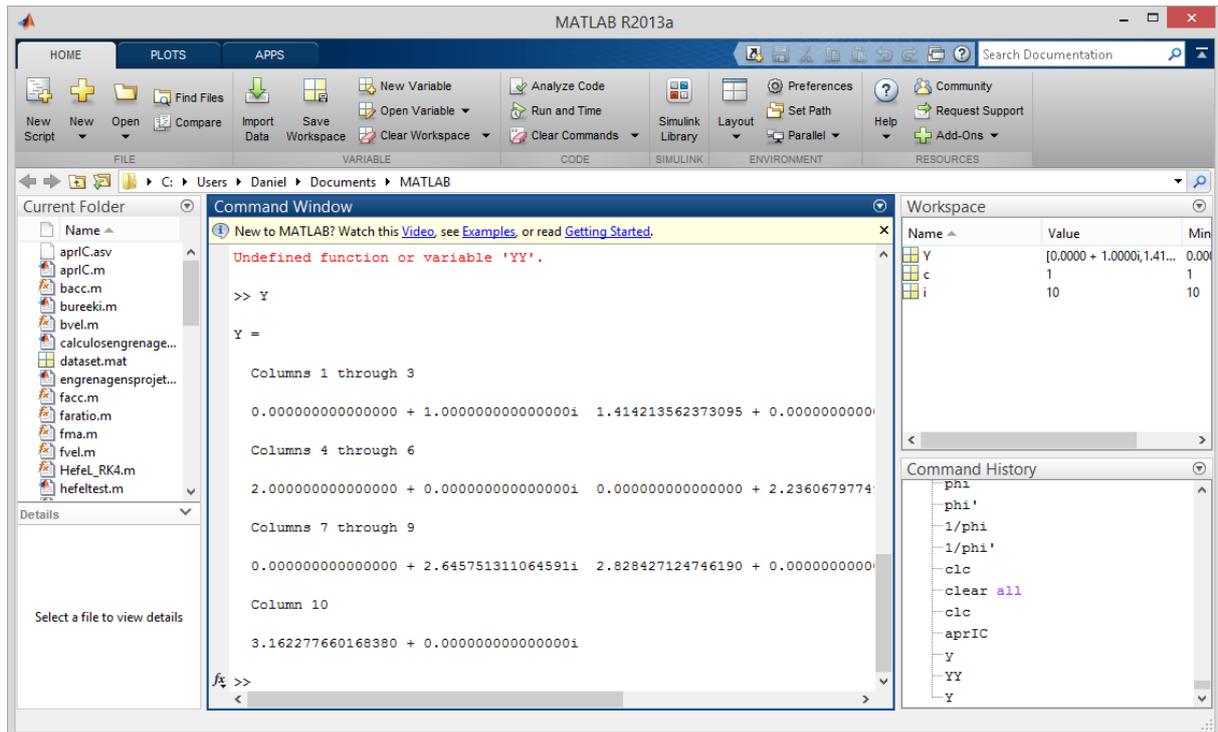
O código gerado no programa Matlab para exibição dos campos magnéticos vetoriais, segue abaixo.

```
>> x= 0: pi/100: 2*pi;  
>> y= 0: pi/100: 2*pi;  
>>[X, Y] = meshgrid (x,y);
```

```
>> U= [sin(x)*cos(y), -cos(x)*sin(y), 2*sin(x)*sin(y)];
```

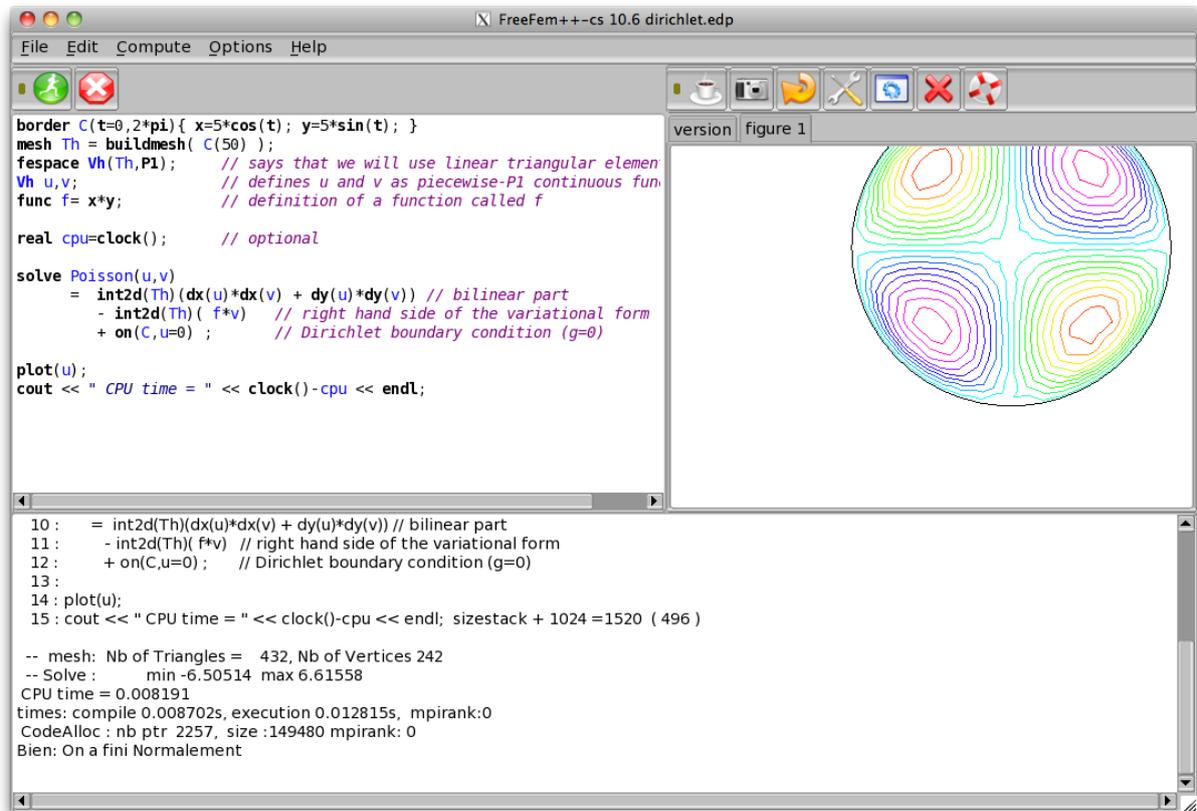
```
>>mesh (X, Y, U);
```

Resultado obtido na imagem:



Por fim, para a análise das equações, o programa principal foi o FreeFEM, cuja utilização se dá por sua interface na forma de um código em linguagem própria (ela foi, porém, baseada na comumente utilizada linguagem de programação C++).

Figura 2 - Interface do FreeFEM



Fonte: Disponível em:

[http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/FreeFEM%2B%2B\\_CS\\_Example\\_-\\_Dirichlet.png](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/19/FreeFEM%2B%2B_CS_Example_-_Dirichlet.png)

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste papel, tem sido demonstrado que a dinâmica essencial de uma configuração de fluxo do tipo Roberts, em um fluido condutor eletricamente, pode ser descrita por modelos de truncagem contendo apenas relativamente poucos modos de Fourier. A exigência de que eles tem que satisfazer todas as simetrias do problema original envolve -los como modelos viáveis para estudar symmetry breaking bifurcações e geração de campo magnético. Incluindo desse modo sucessivamente mais tríades, respeitando os requisitos de simetria, e obtendo uma hierarquia de modelos.

Além disso, em cada modelo existe uma hierarquia de tríades, começando com as tríades primárias formadas pelo fluxo Roberts, uma média horizontal do campo magnético médio e outra parte do campo magnético acoplado a estes dois pelo modo ternário de

interações . Dois modelos de fora da hierarquia, o MTM e OTM, foram escolhidos para uma análise detalhada.

No ponto, que foi mostrado que a MTM, contendo apenas os modos de as tríades principais, é totalmente equivalente a primeira ordem de aproximação entre a teoria de campo médio.

O dínamo de Roberts é um efeito  $\alpha$ . Dínamo puro com um efeito puramente  $\alpha$  horizontal. Este pode ser tratada em grande parte analiticamente, conduzindo, por exemplo, a uma simples dependência do parâmetro de efeito  $\alpha$  com o número de Reynolds magnético de dínamo com soluções estacionárias. Para o MTM, uma condição analítica simples poderia ser derivado dando o número de Reynolds magnético crítico para o início da ação de dínamo como uma função da onda verticais,  $K_0$  número do campo magnético (com os números de onda de o fluxo nas direções horizontais  $x$  e  $y$  fixada para o valor de 1). A condição mostra, por exemplo, que o MTM é inválida para vertical, números de ondas  $k_0$  perto ou maior do que 1. Isso poderia ser de interesse prático para o experimento dínamo Karlsruhe uma vez que o número de onda  $K_0$  lá, embora menor do que 1, não é pequena em comparação com 1. A fim de ultrapassar a restrição de pequenos números de onda verticais, nós escolhemos o mais geral OTM como um modelo representativo por meio do qual, em seguida, investigaram as soluções dínamo em mais detalhe a partir do ponto de vista da dinâmica não-linear. Especialmente, a simetria quebrando bifurcações na rota para o caos que têm sido estudados e classificados.

O papel dominante do  $S_1 \times Z_2$ , correspondente à simetria de translação do fluxo de Roberts combinado com a simetria de reflexão,  $VE$  e  $Ev \rightarrow BE \rightarrow -BE$ , da equação de indução, foi elucidado. Ela é responsável pela geração de OW na transição ao regime de tempo periódica. O ramo OW é caracterizada por um sobrevivente invariância  $Z_2$  espaço-temporal da órbita periódica. Uma outra bifurcação dentro do regime de tempo periódica foi detectado, com o ramo bifurcando denotado como OW \*. As soluções deste ramo ainda possuem o espaço-temporal simetria  $Z_2$ . No entanto, eles podem ser claramente distinguida da OW pela forma e comportamento temporal da média líder de campo magnético, em particular, a um dínamo de atividade reduzida Por último, mas não menos importante, a ocorrência de um intervalo finito de parecer notável, onde, em comparação com um normal, anterior solução toro, existe uma direção marginal adicional em espaço de fase e, portanto, quatro expoentes Lyapunov são iguais aos zero, antes de caos em seguida, define.

Este projeto teve sua conclusão com seu máximo de êxito, foi bem sucedido e pode elevar o nível de conhecimento tanto do orientando, quanto do orientado na área da magneto

hidrodinâmica e suas causas. Ao se entender como e porque o efeito dínamo ocorre, pode-se prever algumas de suas consequências, e possivelmente, utilizá-las para fins úteis.

A principal proposta era resolver as equações da magnetohidrodinâmica e capturar as primeiras bifurcações de ambos os campos, com a ajuda dos softwares FreeFEM e Matlab. Todas executadas com um nível de aprendizagem de sucesso e que estão presentes neste artigo.

## REFERÊNCIAS

BRANDERBURG, A.; RÄDLER, K. –H. Contributions to the theory of a two-scale homogeneous dynamo experiment. Ed 67 026401. Potsdam, Alemanha: Physical Review E, 2003.

DONNER, R. et al. Low-dimensional dynamo modelling and symmetry-breaking bifurcations. *Science Direct*, out. 2006. Disponível em <<http://www.sciencedirect.com/>>. Acesso em: 13 out. 2014.

FEUDEL, F.; RÜDIGER, S.; SEEHAFER, N. Dynamo bifurcations in an array of driven convectionlike rolls. Ed 57 5533-5538. Potsdam, Alemanha: Physical Review E, 1998.

FEUDEL, F. et al. Dynamo effect in a driven helical flow. Ed 68 046302. Potsdam, Alemanha: Physical Review E, 2003.

KRAUSE, F. RÄDLER, K. –H. Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Ed 1. Berlim, Alemanha: Pergamon, 1980. 270 p.

LARMOR, J. How could a rotating body such as the Sun become a magnet? Londres, Inglaterra: Report of the British Association for the Advancement of Science, 1919.

MININNI, P. D.; MONTGOMERY, D. C. Low magnetic Prandtl number dynamos with helical forcing. Ed 72 056320. Hanover, Nova Hampshire, EUA: Physical Review E, 2005.

MOFFATT, H. K. Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids. Ed 1. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press, 1978. 320 p.

PARKER, E. N. Cosmical Magnetic Fields. Oxford, Inglaterra: Clarendon Press, 1979. 858 p.

ROBERTS, G. O. Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity. 1972. 454 p.

**Contatos:** douglaslima.com@hotmail.com (IC) e jihlpez@gmail.com (Orientador).