

ESTUDO DO ATRATOR DE RÖSSLER

Felipe Ezsias Fiumarelli (IC) e José Ignacio Hernandez López (Orientador)

Apoio: PIVIC MACKENZIE

RESUMO

A busca pelo entendimento das relações da natureza e do espaço, foram constantemente estudadas desde o início dos estudos feitos pelo homem. A obsessão deste entendimento levou o homem ao conhecimento de diversas áreas, que embora não revelassem o entendimento desta natureza por completo, ajudaram no processo evolutivo e com isso o surgimento de diversas ciências. Os sistemas de equacionamento matemático sofreram estas mudanças também. A evolução destes sistemas matemático possibilitou o estudo e previsão de diversos fatores presentes no cotidiano do homem. Porém na ciência moderna, foram descobertos outros tipos de sistemas, que não seguiam os modelos até então conhecidos e, no entanto, representavam melhor as relações da natureza e do espaço. Estes sistemas, chamados de sistemas caóticos, apresentam novas características, que foram estudadas por muitos cientistas e pesquisadores. Otto E. Rössler é um destes cientistas que focou parte de seus estudos na tentativa do entendimento dos sistemas caóticos a partir de um sistema já conhecido, o sistema de E. N. Lorenz. O estudo de sistemas deste tipo pode no futuro nos possibilitar uma previsão (percentual) de fatos presentes na natureza que atualmente tratamos como imprevisíveis, como o clima e a movimentação de planetas no sistema solar. O estudo do sistema de Rössler, chamado de atrator de Rössler, mostra que este sistema apresenta seções de Poincaré, representando, portanto, um sistema caótico. As análises gráficas feitas pelo software MATLAB, mostraram os principais pontos de estudo deste sistema e a questão muito importante relacionada à sensibilidade de sistemas do tipo caótico.

Palavras-chave: Homem, Ciência, Sistemas caóticos, Rössler.

ABSTRACT

The searching of knowledge about the nature relationships and the space, are constantly studied since the beginning of the man researches. The obsession of this understood brought to man to the knowledge of many areas, that although, does not revealed the completely understanding of this nature, helped with the evolutive process and the growing of many sciences. The equational mathematical systems suffering with this changes to. The evolution of this mathematics systems granted allowed study and prediction of some facts in our daily life. however, in the modern science, other kinds of systems was discovered, this systems don't followed the knowing model so far understood, but they have a better representation of the nature relationship and the space.

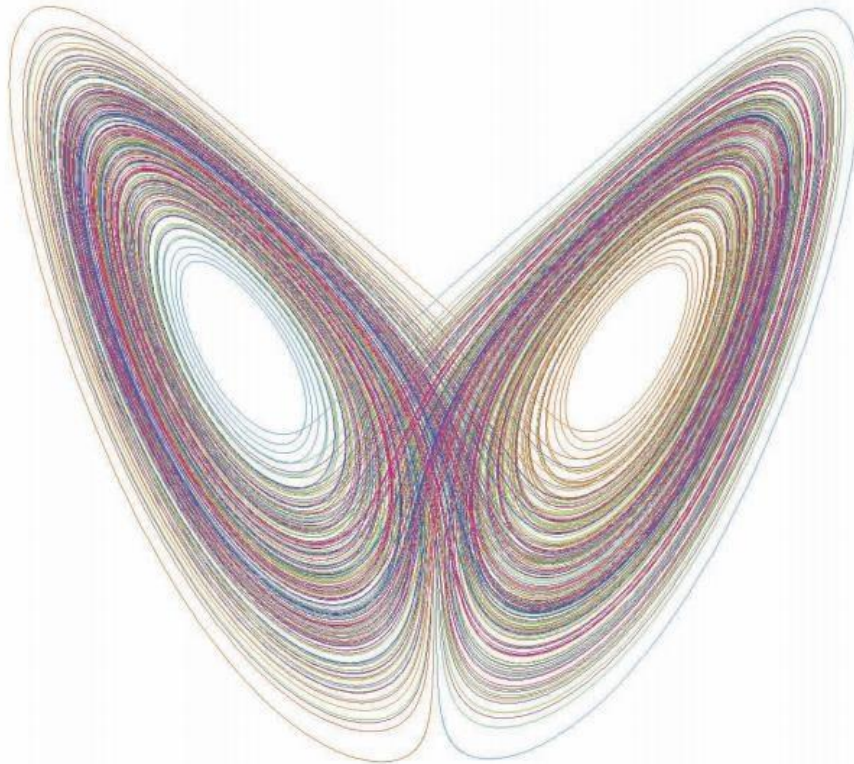
Those systems, called of chaotical systems, shows newest characteristics, whit was studied by many scientists and researchers. Otto E. Rössler is one of these scientists which focused part of their studies in an trying to understood the chaotic systems, as from an known system, the system of Lorenz. The study of systems like this, may be in the future, help us to stablish an (percental) prediction of facts presents in the nature, with was actually we take as unpredictable, like the weather and the motion of the planets in our solar system. The study of Rössler system, is called as Rössler Attractor, shows with the Rössler band has a Poincaré section, represent then, it is the fact a chaotic system. The graphics analysis in software MATLAB, will present the main points of this study and a very important case, with was the sensibility of the chaotic systems

Key-words: Chaotic, systems, nature, Rössler, study.

INTRODUÇÃO

Para se iniciar um estudo do atrator de Rössler, é preciso entender o que são atratores, no caso atratores estranhos. Segundo Marcelo Miranda Viana da Silva, diretor Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada “Um atrator é uma região do espaço de configurações que fica invariante quando o tempo passa e que atrai muitas (ou até todas as) configurações próximas [...] E atrator estranho acabou significando um atrator tal que as trajetórias que convergem para ele dependem sensitivamente do ponto inicial.” Esta definição é baseada nos estudos de E. N. Lorenz que propôs um sistema de equações diferenciais para o seu estudo. Porém sabe-se que um atrator não se manifesta somente em forma de equações complexas, como sistemas de equações diferenciais, que geram fractais como os da Imagem 1, como também pode ser um simples ponto no espaço.

Imagem 1. Fractal de Lorenz, gerado através de um sistema complexo de equações diferenciais



Fonte: SPOTT, 2008

Estes sistemas possuem sensibilidade às condições iniciais de contorno. Fato que já era sabido no século XIX por J.C. Maxwell. Porém foi mais explicitamente conhecido pela literatura que E. N. Lorenz propôs, “Em um sistema caótico, a trajetória se move em torno de um atrator, com o passar do tempo, porém, dois pontos próximos se separam exponencialmente, de modo

que, eventualmente eles estarão muito longe um do outro. Todavia o futuro deles é determinado única e precisamente pelas equações governantes, mudanças extremamente pequenas no ponto de início conseguem ocasionar grandes diferenças nas condições futuras. ”

Sistemas como o de Lorenz existem em grande quantidade, tais como o atrator de Rössler. Otto Eberhard Rössler é um bioquímico alemão que possui uma série de pesquisas em diversos campos da ciência. O seu trabalho mais conhecido é o atrator de Rössler, que assim como o atrator de Lorenz também é um atrator estranho. No artigo escrito por Rössler, que foi entregue em 27 de maio de 1976, Rössler cita o modelo de Lorenz como sendo três pares de equações diferenciais ordinárias que contém dois termos não lineares como mostrado no sistema de equações (1).

$$\dot{x} = 10 \cdot (y - x), \quad \dot{y} = x \cdot (28 - z) - y, \quad \dot{z} = x \cdot y - \frac{8}{3} \cdot z \quad (1)$$

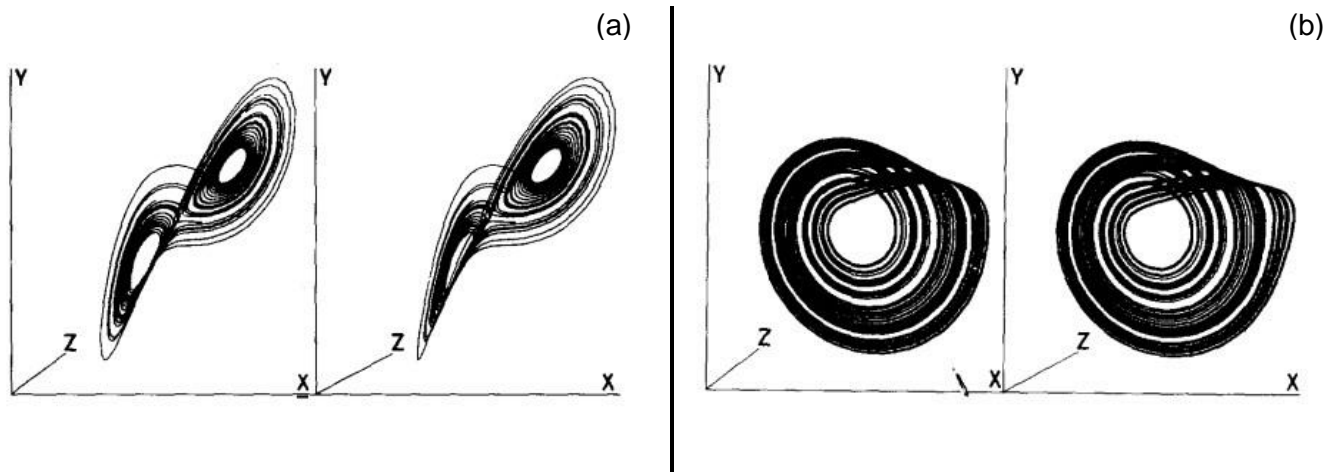
Pode se perceber os termos da segunda equação xz e da terceira equação xy são não lineares e de segunda ordem. Rössler questionava a possibilidade de se trabalhar com tais equações devida a suas complexidades. O comportamento qualitativo da equação (1) ainda é insuficientemente compreendido, principalmente porque a técnica usual para analisar oscilações – para achar uma seção (Poincaré) através do fluxo, que é um (auto-) difeomorfismo – não é aplicável (Rössler, 1976).

Rössler então propõe uma equação mais simples, que ele dizia ser um modelo de um modelo, que não possuía um significado físico de imediato, onde seria gerado um fluxo similar a aquele de Lorenz mas formasse apenas uma única espiral. O sistema de equações (2) mostra a proposição de Rössler.

$$\dot{x} = -(y + z), \quad \dot{y} = x + 0,2 \cdot y, \quad \dot{z} = 0,2 + z \cdot (x - 5,7) \quad (2)$$

Como na equação anterior de Lorenz a de Rössler também pode se encontrar xz como termo não linear de segunda ordem, porém é somente este termo no sistema de equações.

Imagem 2. (a) Trajetórias do modelo de Lorenz promovidas pelo sistema de equações (1). Vista estereoscópica (projeções paralelas; a ilustração da esquerda é destinada ao olho direito e viceversa). Simulação numérica feita na HP9820A utilizando uma rotina de integração padrão RungeKutta-Merson (Rössler, 1976) (b) Fluxo da trajetória do sistema de equações (2). Estereoscópico como na imagem (a) (Rössler, 1976).



Fonte: RÖSSLER, 1976

Através do estudo das estruturas da imagem (2), Rössler constatou que seu sistema apresentava uma compreensão qualitativa do fluxo caótico mais simples de se obter. Rössler diz ainda em seu artigo que, o seu sistema de equação (2) ilustra um princípio mais geral para a geração do caos do tipo espiral (movimento em espiral apresentado na natureza no processo de evolução e crescimento). Ao fim de seu artigo Rössler fala que os princípios que envolvem seu sistema são a porta de entrada facilitada para o surgimento de novos sistemas caóticos artificiais que podem ajudar a orientar a identificação de outros sistemas naturais que possuem os mesmos comportamentos.

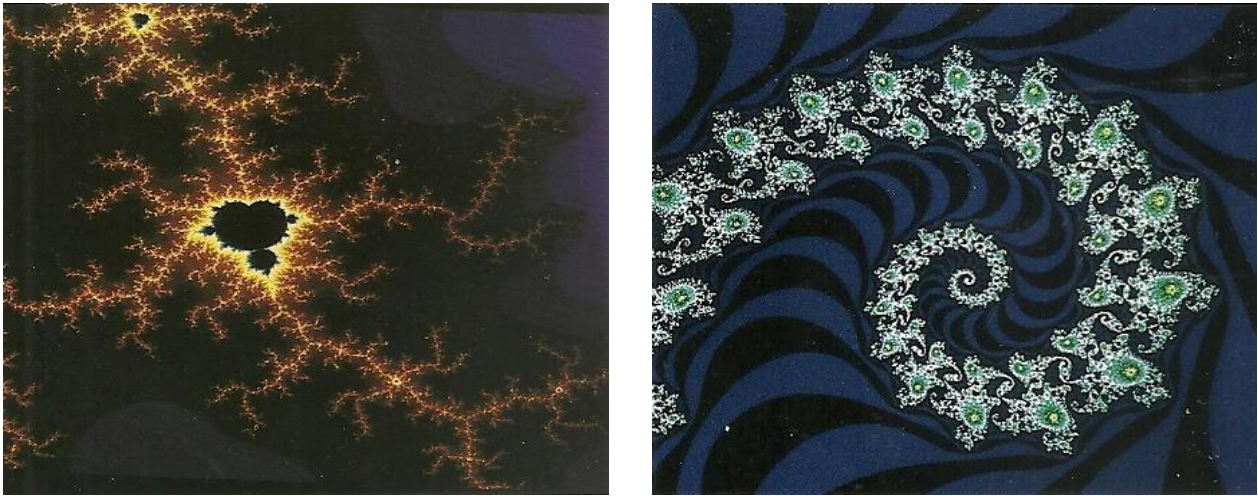
A importância destes sistemas não se aplica somente à pesquisa de coisas fora do âmbito terrestre e que por muitas vezes não são de interesse para a maioria das pessoas. A formação de sistemas similares está presente em nosso dia a dia, através de inúmeras coisas. A formação do clima é um exemplo conhecido que representa uma formação caótica da natureza, assim como as relações econômicas relacionadas ao mercado financeiro com suas grandes quantidades de variáveis, gerando possibilidades aleatórias que costumamos dizer imprevisíveis. O estudo de sistemas como o de Rössler nos aproxima de resoluções sobre questões relacionadas a previsão de coisas que inicialmente são dadas com imprevisíveis. Não se trata de uma previsão exata, mas sim de uma porcentagem de previsão, como se fosse dito que no dia de amanhã, existe 80% de chance de chover. Pode-se assim diminuir as chances de que situações que possam causar prejuízos à sociedade sejam evitadas.

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

TEORIA DO CAOS

O ser humano sempre buscou o entendimento da natureza e de suas relações, do modo como os planetas seguem suas trajetórias até a simples geração da vida na terra. Porém estas questões, após tantos anos, ainda não possuem um entendimento completo. Vejamos pela ótica do sistema solar, Denny Gulick discorre em seu livro “Encounters with chãos” sobre as diferentes teses que foram feitas por grandes cientistas, sobre a orbita dos planetas e como era o seu movimento no espaço. “[...] Johannes Kepler used the calculations of tycho brahe to convince himself that the planets in our solar system move in elliptical orbits around the sun.” (Gulick, 1992). Kepler acreditava que os planetas se movem em trajetórias elípticas, o que futuramente foi contestado por Isaac Newton que provou que qualquer planeta que esteja sob influência apenas do sol se move em órbita elíptica. Ele também resolveu o problema dos dois corpos que se refere da análise do movimento de um corpo sobre influência de um outro único corpo. Porém o sistema de Newton apresentava apenas uma aproximação do que ocorre com os corpos (planetas), visto que por exemplo, a terra não sofre forças de apenas um único outro corpo, ela está sujeita a forças do sol, da lua e de alguns outros planetas ao seu redor. Henri Poincaré que também estudo o movimento dos planetas, focou suas pesquisas no problema dos três corpos. O que Poincaré pôde constatar é que é impossível dar uma simples percussão de órbita para um corpo influenciado por outros dois corpos. Poincaré percebeu também que se pegar duas leituras diferentes de posição de um planeta em um determinado momento, sem importar o quão perto as leituras estiverem, após um certo período de tempo as orbitas dos planetas correspondentes à duas leituras diferentes irão se separar. Isto é uma das características do comportamento caótico (Gulick, 1992). Este é o campo da ciência que estuda a dinâmica caótica que embora pelo nome pareça algo totalmente bagunçado, confuso e desorganizado, está muito distante disto. Em um dinamismo caótico um objeto sujeito a um comportamento imprevisível, porém não aleatório. Isto é o que define um comportamento caótico. A não aleatoriedade nos mostra que diferente do que se pensa sobre a palavra caos, temos uma regularidade na dinâmica caótica. Como mostrado na imagem 3, embora o comportamento dos fractais seja imprevisível, podemos perceber uma regularidade, que caracteriza a não aleatoriedade.

Imagem 3. Fractais comumente encontrados na natureza, regidos por equações complexas de sistemas caóticos, imprevisíveis, porém não aleatórios.



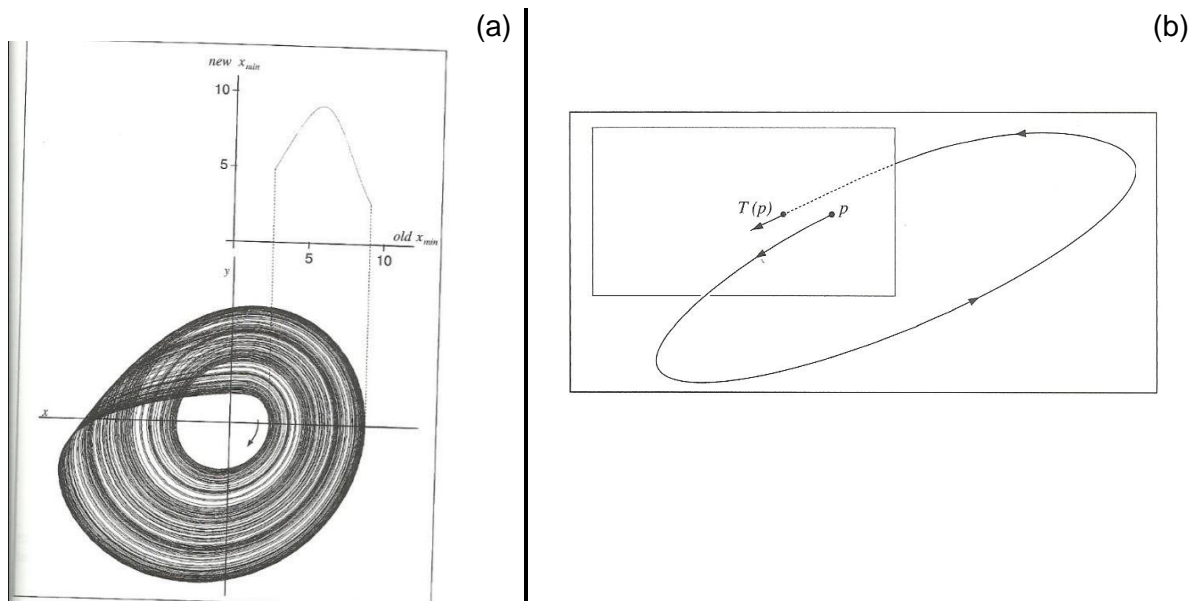
Fonte: GULICK, 1992

Os estudos dos sistemas caóticos não visam um controle total sobre as equações caóticas ou uma busca sobre uma previsão exata, em vez disso se busca uma possibilidade, que seja o suficiente confiável para o planejamento de uma ação futura. Viana, discorre sobre o estudo de sistemas caóticos desta maneira. “Você não pode prever individualmente como o sistema vai evoluir dessa condição inicial, mas pode dar uma informação estatística, em que 30% do tempo será dessa forma, 20% será de outra forma. Ou seja, a palavra caos dá esta ideia de imprevisibilidade, mas, na verdade, você pode dizer sobre estes sistemas, desde que se use a linguagem de probabilidade, a linguagem de médias, de porcentagens.” (Viana, 2016)

MAPA DE POINCARÉ

Para se analisar um sistema caótico é necessário a utilização de ferramentas específicas, o mapa de Poincaré é uma destas ferramentas, capaz de auxiliar o estudo de sistemas caóticos. Henri Poincaré fez estudos em diversas áreas do conhecimento, uma delas era o estudo da dinâmica do movimento dos planetas, focada no problema dos três corpos, como citado anteriormente, definindo em seus estudos a características de um sistema caótico. Para se entender o mapa de Poincaré utiliza-se o auxílio de gráficos. A imagem 4 (a) mostra uma faixa do gráfico de Rössler onde podemos analisar uma seção de Poincaré. A imagem em si não diz nada em relação ao que Poincaré estudou, mas sua projeção ortogonal na imagem 4 (b), sim.

Imagem 4. (a) Vista do plano XY do atrator de Rössler e a faixa onde será retirada a projeção ortogonal para estudo do mapa de Poincaré. (b) Vista ortogonal de uma faixa de atrator em um determinado tempo, para ilustrar o trabalho de Henri Poincaré.



Fonte: PEITGEN; HEINZ-OTTO, 1992

Para criar uma transformação discreta que reflète a verdadeira dinâmica, consideremos um retângulo contido na faixa de Rössler na seção dada pelo eixo z e pela parte negativa do eixo x . O retângulo da imagem 4 (b) é transversal ao fluxo do sistema, significando que a trajetória em um certo tempo perfura este plano colocado transversalmente. Esta trajetória não se aproximam tangencialmente, uma superfície que tenha estas características é chamada de seção de Poincaré. “A dinâmica do sistema pode ser descrita com a transformação de T definido como uma seção. Dado um ponto inicial p na seção seguimos a trajetória correspondente até a seção ser adentrada novamente. Este ponto tomado como $T(p)$ e pelo mesmo procedimento a imagem do ponto $T(p)$ é definida para todos os pontos iniciais p da seção. A transformação T é chamada de mapa de Poincaré.

(PEITGEN; HEINZ-OTTO, 1992).

ANÁLISE COMPUTACIONAL

As equações para resolução de problemas de dinâmica caótica são muito complexas e exigem um nível avançado de cálculo para poderem ser resolvidas, suas soluções só foram

possíveis depois do advento da computação, que possibilitou o cálculo numérico em grande escala. O software de computador MATLAB é uma grande ferramenta para cálculos e resolução de diversos problemas de maneira simplificada. Outra grande ferramenta de auxílio, porém em plataformas online são o WOLFRAM ALPHA e o OCTAVE ONLINE. Estas ferramentas possuem em seu banco de dados uma grande quantidade de funções prédefinidas e que podem auxiliar nas resoluções de problemas. A linguagem básica destes programas é muito similar a linguagem C++, porém existem funções e comandos que são específicos de cada software. Para as equações diferenciais que serão resolvidas no MATLAB, a função utilizada para o cálculo de equações e sistemas diferenciais é a ODE (Ordinary Differential Equations) o significado da sigla traduzido significa equações diferenciais ordinárias. Equações deste tipo contém uma ou mais derivadas de uma variável dependente (x, y, z, etc.) em função de outra variável, que normalmente é o tempo. No caso do software MATLAB a função “solver” tem algumas maneiras de ser escrita e dentro desta função possuem prefixos que indicam o método no qual será realizado os cálculos. Para resolução de problemas de análise e solução de sistemas de equações diferenciais, duas funções são mais aconselhadas, a função “ode23” e a função “ode45”. Na primeira respectivamente, o número 23 que se encontra após a escrita da “ode”, significam que são duas formulas simultâneas de um único passo, envolvendo um de segunda ordem e um de terceira ordem. A segunda função respectivamente, providencia formulas de quarta e quinta ordem e possui extrapolação local e uma interpolação complementar (MOLER, 2014).

Cleve Moler, o autor do primeiro MATLAB, estabelece um paralelo entre as duas funções “ode23 é um método de Runge-Kutta de terceiro estágio e terceira ordem. Ode45 é um método de Runge-Kutta de seis estágios e quinta ordem. Ode45 faz mais trabalho a cada passo, do que ode23, porém consegue fazer passos muito maiores. Para equações diferenciais com solução estável, ode45 é muitas vezes mais preciso que ode23.” (MOLER, 2014). A documentação do MATLAB nos traz a seguinte sintaxe para a função ode45:

$$[t, y] = \text{ode45}(\text{odefun}, \text{tspan}, y_0) \quad (3)$$

$$[t, y] = \text{ode45}(\text{odefun}, \text{tspan}, y_0, \text{options}) \quad (4)$$

Onde:

Na função de MATLAB (3, 4) a chamada “odefun” corresponde ao nome do ficheiro que será atribuída a equação diferencial. A chamada “tspan” representa a faixa de tempo que a função percorrerá nos cálculos, onde cada linha da matriz de solução “y” corresponde a um valor de retorno na matriz coluna “t”. Onde “y0” são os valores iniciais dados à equação diferencial. “Options” representam uma estrutura de parâmetros de configuração. (MATSUMOTO, 2013).

METODOLOGIA

EQUAÇÕES DE RÖSSLER

O sistema de equação de Rössler que foi escrito em seu artigo em 1976 é escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y - z; \\ \frac{dy}{dt} = x + ay; \\ \frac{dz}{dt} = b + zx - cz; \end{cases} \quad (5)$$

Para uma simplificação será mudada a forma de escrita do sistema de equações (5) sem a alteração de quantidades de variáveis, por uma questão prática.

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(2) - x(3); \\ \dot{y} = x(1) + ax(2); \\ \dot{z} = b + x(3)x(1) - cx(3); \end{cases} \quad (6)$$

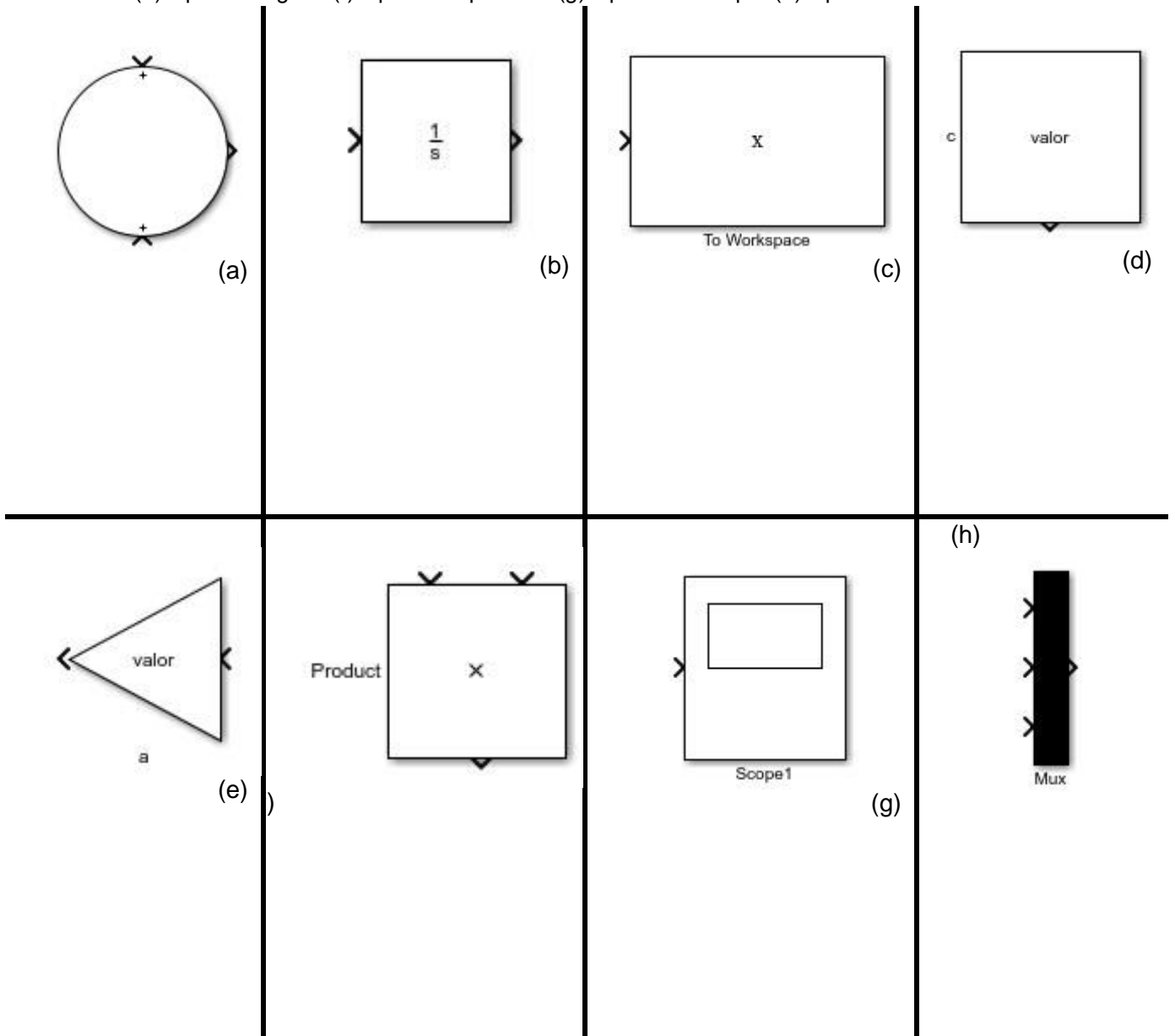
O sistema de equação (6) irá auxiliar na montagem dos sistemas no software MATLAB, que será utilizado para analisar graficamente os diversos resultados que a equação pode dar para determinadas condições, obviamente não serão calculados todos os resultados possíveis pois são infinitas as possibilidades para este tipo de sistema de equação. Os parâmetros alterados foram x, y e z. Respectivamente alterados por x(1), x(2) e x(3). Tanto na equação (5) como na equação (6) existem os três parâmetros “a”, “b” e “c” que são os parâmetros de condição

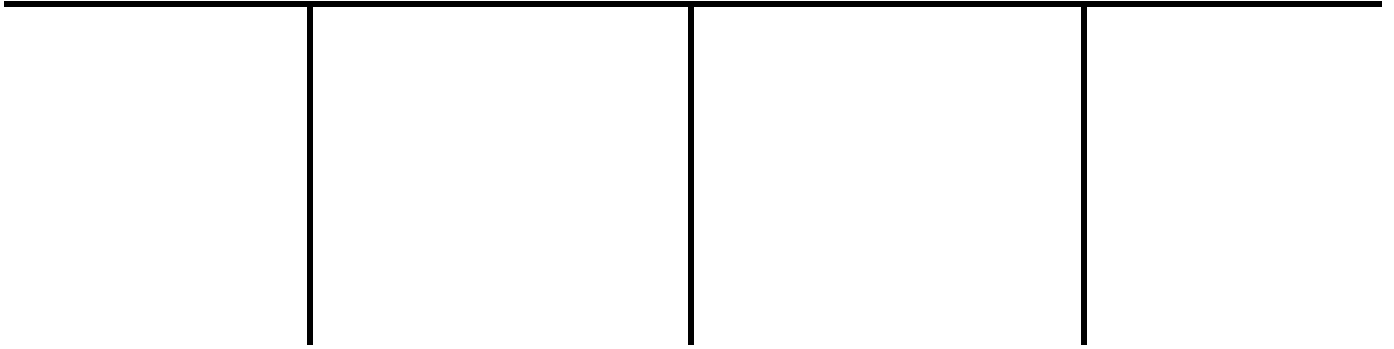
inicial do sistema, são constantes que serão atribuídos valores futuramente, na etapa de resolução e simulação.

CONSTRUÇÃO DA EQUAÇÃO NO SIMULINK

SIMULINK é um ambiente de diagramas de blocos para simulação de múltiplo domínio. Esta ferramenta, possui muita simplicidade e uma biblioteca vasta para muitos tipos de aplicações. As imagens (5,6) apresentam os blocos que foram utilizados na programação do sistema de equações de Rössler.

Imagem 5. (a) Operador “sum” (b) Operador “integrator” (c) Operador “to workspace” (d) Operador “constant” (e) Operador “gain” (f) Operador “product” (g) Operador “scope” (h) Operador “mux”

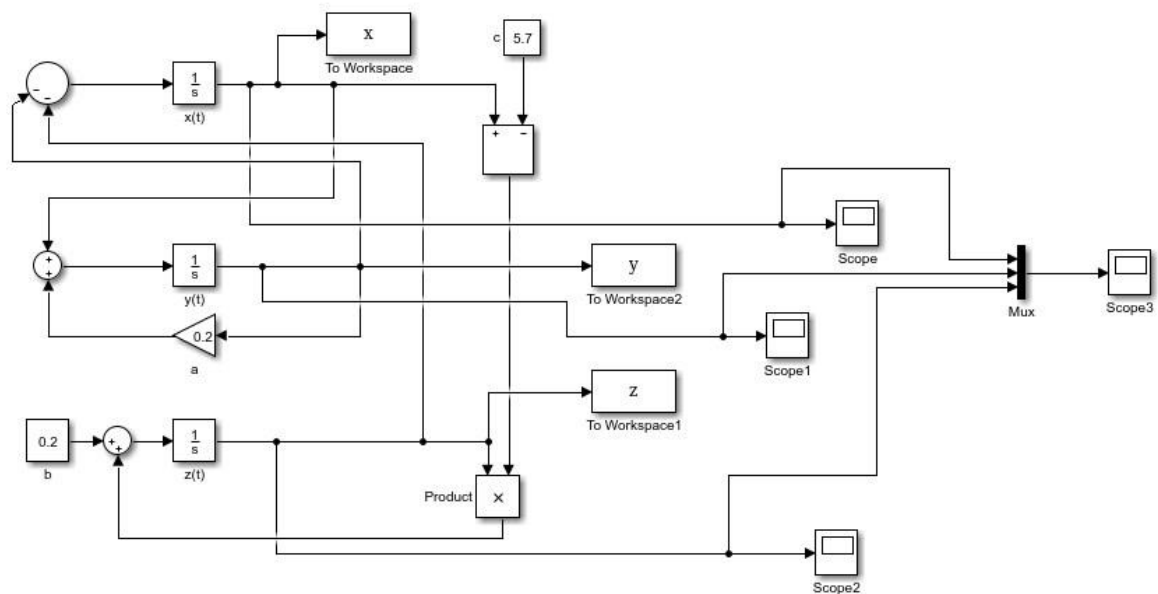




Fonte: Acervo próprio

O operador “sum” imagem 5(a) executa adição ou subtração em seu sinal de entrada. O operador “integrator” imagem 5(b) transmite o valor da integral do seu sinal de entrada em relação ao tempo. O bloco “to workspace” imagem 5(c) recebe um sinal em sua entrada e o transmite para a área de trabalho do MATLAB. A imagem 5(d) mostra o operador “constant”, que adiciona uma constante ao sistema. O operador “gain” imagem 5(e) multiplica um sinal de entrada por uma constante. O bloco da imagem 5(f) “product”, retorna uma multiplicação de dois sinais de entrada. A imagem 5(g) mostra o operador “scope” que mostra os sinais gerados durante a simulação. O operador “mux” imagem 5(h), combina vários sinais de entrada em vetor. A imagem 6 mostra a montagem completa do diagrama de blocos para o sistema de equações diferenciais de Rössler.

Imagem 6. Montagem do diagrama de blocos do sistema de equações diferenciais de Rössler no software SIMULINK



Fonte: Acervo próprio

CONSTRUÇÃO DO CÓDIGO EM MATLAB

Para a construção do código no software, a utilização do sistema de equação (6) simplificado foi necessário. A primeira etapa para a construção do sistema foi a etapa de escrita da função ROSSLER que irá ser utilizada em outra função. A função ROSSLER contém o sistema de equações diferenciais escrita por Otto E. Rössler em 1976. A função foi montada e salva em arquivo de extensão “.m” (ROSSLER.m). A função ficou armazenada neste formato para que toda a vez que for necessário utiliza-la, simplesmente será utilizada uma chamada de função, facilitando assim a escrita do código e deixando ele mais limpo. A imagem 7 mostra o código criado. Para facilitar a execução do programa os parâmetros iniciais vistos na equação 5 (a, b e c), já estão acionados com valores de 0.2, 0.2 e 5.7 respectivamente.

Esquema 1. Função “ROSSLER.m” utilizada para o calculo no software MATLAB

```
function dx = ROSSLER(t,x)
    dx = [-x(2)-x(3) ; x(1)+0.2*x(2) ; 0.2 + x(3)*x(1)-5.7*x(3)];
end
```

Fonte: Acervo próprio

Primeiramente para a construção de uma função para resolver o sistema de equações diferenciais foi criada uma nova função que foi denominada de “resolucao.m”. Esta nova função irá executar os cálculos através da função pré-definida do MATLAB chamada solve. A primeira

etapa consiste em chamar a função “ROSSLER.m”, criada anteriormente como mostra o esquema 2.

Esquema 2. Cabeçalho de função e chamada da função “ROSSLER.m”

```
function resolucao clear all clc
type ROSSLER
```

Fonte: Acervo próprio

Após a chamada da função é necessário apresentar as condições iniciais das variáveis e o tempo de início e término das iterações que a função solve irá executar, como mostrado no esquema 3. Onde “t0” e “tfinal” são os parâmetros de tempo inicial e tempo final respectivamente. E “y0” são os valores iniciais para as variáveis x, y e z do sistema de equação 5 escritos em forma matricial.

Esquema 3. Exemplo de parâmetros iniciais para a função “solve” executar

```
t0 = 0; tfinal = 200;
y0 = [0 0 0];
```

Fonte: Acervo próprio

Definido os parâmetros iniciais, o passo subsequente será a função solve. Para os cálculos será utilizado a função ode45, onde os primeiros parâmetros a limitar são as tolerâncias de erro. No esquema 4 é mostrado os parâmetros escolhidos para “RelTol” que são os parâmetros para tolerância de erro relativa e para “AbsTol” que são os parâmetros para tolerância de erro absoluto.

Esquema 4. Utilização da função ode45 e seus parâmetros

```
options = odeset('RelTol' ,1e-6, 'AbsTol' ,[1e-6 1e-6 1e-6]);
[t,y] = ode45('ROSSLER', [t0 tfinal],y0, options);
```

Fonte: Acervo próprio

Com o Sistema de equação diferencial calculado, pode-se estabelecer a análise gráfica através do comando “plot” para obter uma plotagem em 2 dimensões, pode se utilizar o comando plot3, para obter uma plotagem em 3 dimensões, como mostrado no esquema 5 e 6.

Esquema 5. Utilização da função plot para gerar as imagens de estudo do atrator de Rössler

```
plot(t,y(:,3), '-b',t,y(:,2), '-r',t,y(:,1), '-k') title('EQUAÇÕES DE ROSSLER')
grid on axis([0 300 -10 30]);
legend('dz/dt', 'dy/dt', 'dx/dt')
```

Fonte: Acervo próprio

No esquema 4 o plot está vinculado ao tempo pelo t e “y” vincula aos parâmetros x, y e z do sistema de equação 5, onde a notação 1, 2 e 3 representam x, y e z respectivamente. A notação “title” coloca um título ao gráfico já a notação “grid” põe uma grade sobre os eixos do gráfico. A notação “axis” serve para limitar a amostragem do gráfico à valores especificados, para melhor visualização. E a notação “legend” serve para colocar uma legenda no gráfico.

Esquema 6. Utilização da função plot3 para gerar as imagens de estudo do atrator de Rössler

```
plot3 (y(:,1),y(:,2),y(:,3),'b');  
title('ATRATOR DE RÖSSLER 3D')
```

Fonte: Acervo próprio

RESULTADOS

Foram feitas simulações com alguns valores de condições iniciais para o sistema de equações diferenciais de Rössler e os gráficos obtidos serão demonstrados e analisados, para a determinação dos fatores que afetam a formação do atrator de Rössler. Serão identificados padrões que possibilitam chamarmos o atrator de Rössler como um atrator estranho e se este atrator realmente possui sensibilidade, sendo esta uma importante característica de atratores estranhos.

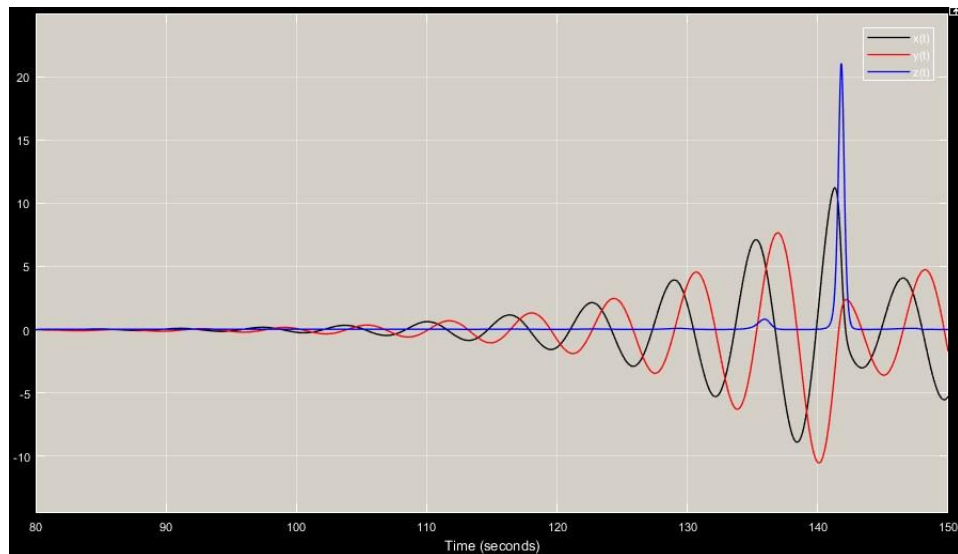
A primeira análise será do sistema feito no diagrama de blocos SIMULINK para as seguintes condições de contorno:

Tabela 1. (a) Condições de contorno para o sistema de Rössler para utilização no SIMULINK gráfico 1
 (b) Condições de contorno para o sistema de Rössler para utilização no SIMULINK gráfico 2

(a)		(b)	
a	0.2	a	0.2
b	0.2	b	0.2
c	5.7	c	8
Tfinal (segundos)	150	Tfinal (segundos)	150

Fonte: Acervo próprio

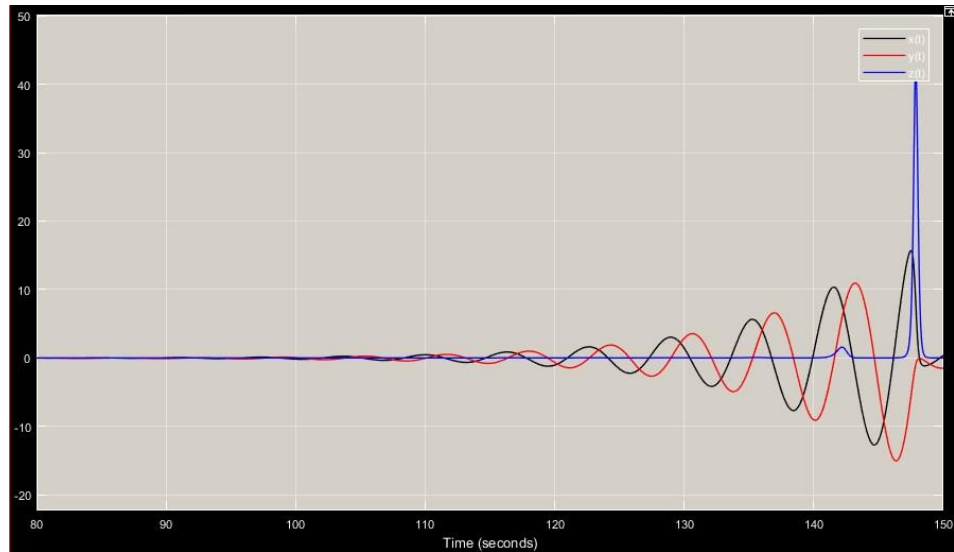
Gráfico 1. Gráfico simulado no software SIMULINK para os valores da tabela 1 (a)



Fonte: Acervo próprio

Pode se perceber que a alteração em um dos parâmetros iniciais no caso o parâmetro c , afetou com grande intensidade os valores do gráfico 2. No gráfico 1 o valor de pico nas variáveis x , y e z foram, 11.24, 7.662 e 21.04 respectivamente, nos tempos de 141.324 para x , 136.932 para y e 141.78 para z . Já no gráfico 2 os valores foram superiores, em x obteve-se 15.7 para o tempo de 147.51 segundos, em y obteve 10.95 com 143.215 segundos e em z o pico foi de 42.92 no tempo de 147.885 segundos. Esta primeira análise mostra que o sistema pode apresentar sensibilidade a condições iniciais distintas. Para a descoberta do pontos de pico foi utilizada a ferramenta “peak finder” do simulink.

Gráfico 2. Gráfico simulado no software SIMULINK para os valores da tabela 1 (b)



Fonte: Acervo próprio

Os primeiros gráficos apresentaram mudanças no parâmetro c , que representa uma das constantes envolvida no sistema de equações de Rössler. Com o auxílio da programação feita em MATLAB, serão plotados gráfico tridimensionais para a análise da sensibilidade nos parâmetros x , y e z do sistema de equação 5.

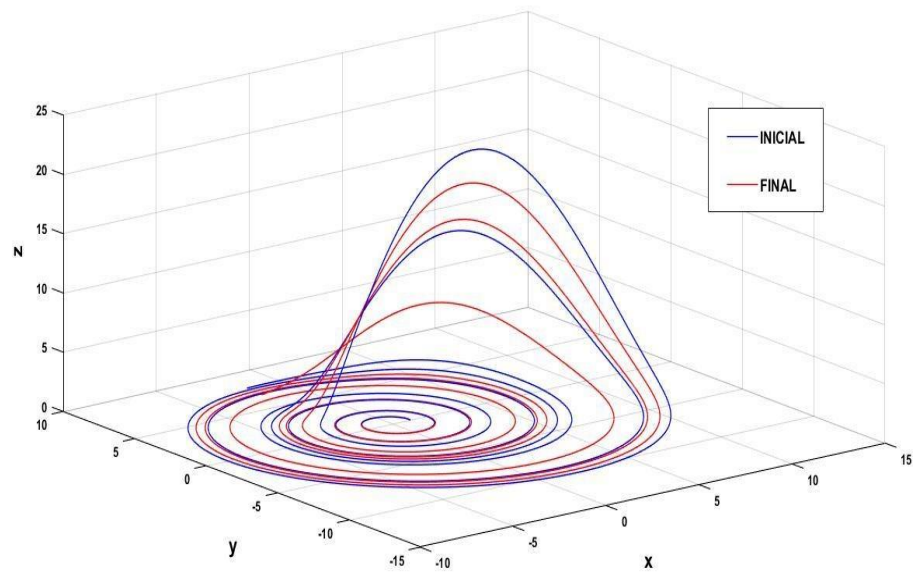
Tabela 2. (a) Condições iniciais para os valores de x , y e z para a plotagem no gráfico em 3 dimensões
 (b) Parâmetros finais para os valores de x , y e z para a plotagem no gráfico em 3 dimensões

(a)		(b)	
PARAMETROS (iniciais)	VALORES	PARAMETROS (finais)	VALORES
X	0.98	X	1
Y	0	Y	0
Z	0	Z	0
TEMPO (segundos)	50	TEMPO (segundos)	50

Fonte: Acervo próprio

No gráfico 3 é possível ver a sensibilidade do sistema. Na tabela 2 é possível observar os valores que foram utilizados para a simulação, percebe-se que a diferença de valores da variável x foi de apenas 0.02, e mesmo sendo uma diferença tão pequena, o gráfico 3 nos mostrou que o caminho em 3 dimensões percorrido pelo sistema de equações foi bem distinto para os dois parâmetros iniciais.

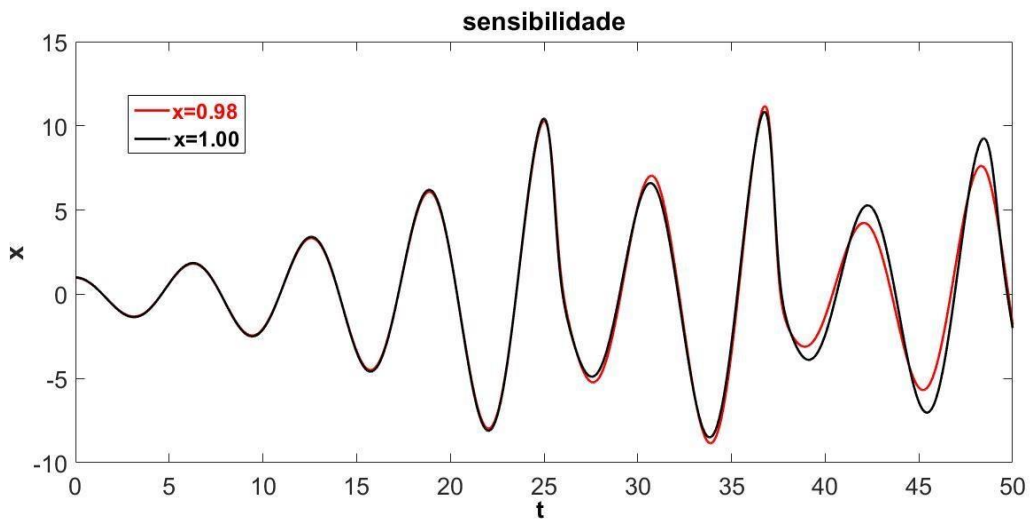
Gráfico 3. Sistema de Rössler em plotagem 3D, com duas condições de contorno distintas



Fonte: Acervo próprio

Para podermos ver como o sistema reage às mudanças pequenas nos parâmetros e analisarmos melhor este efeito será ilustrado no gráfico 4.

Gráfico 4. Plotagem em 2 dimensões da variável x para os valores mostrados na legenda



Fonte: Acervo próprio

O gráfico 4 nos mostra que no início da simulação para os primeiros intervalos de tempo as duas curvas estão caminhando juntas, mas em um certo instante a diferença de valores em sua variável x revela seu efeito sobre o sistema. No momento de tempo aproximadamente igual a 27.5 segundos, as equações se separam e nunca mais voltam a se encontrar.

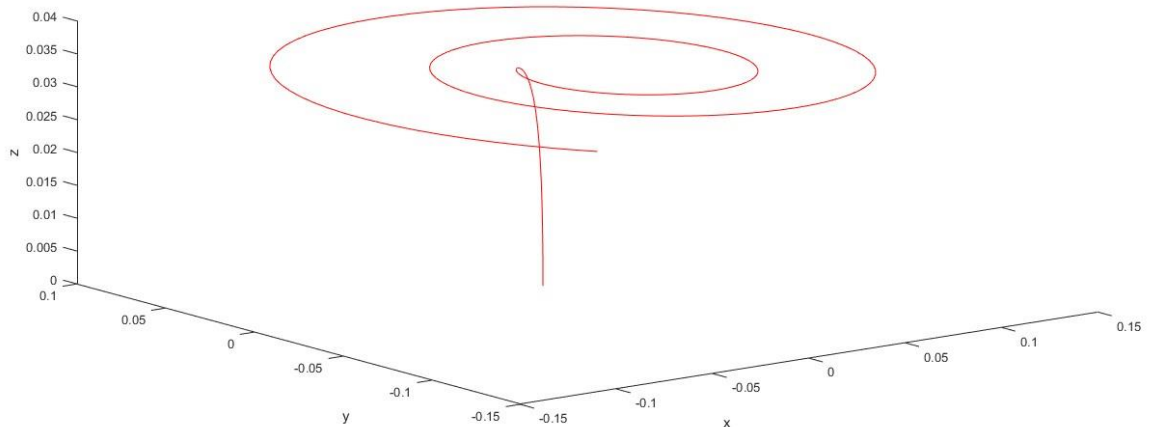
Para o estudo das seções de Poincaré foi adotado um método de arredondamento que é uma das ferramentas que o software MATLAB nos proporciona. A função “round” arredonda o sinal recebido para o número inteiro mais próximo. Para o sistema de Rössler no caso isto quer dizer que quando solicitado para esta função capturar o valor de uma das equações em uma faixa de tempo com um certo intervalo (passo “p”), e pedimos para plotar este valor em duas dimensões (plano “xz” no caso), obteremos pontos de cruzamento da função “round” com o sistema de Rössler, o que em termos práticos estaremos cortando a equação por um plano e analisando os pontos onde a equação perfura este plano. Portanto estaremos vendo uma seção de Poincaré. O esquema 7 mostra a sintaxe da programação.

Esquema 7. Sintaxe da função “round” onde RES é a resolução por ciclo e “p” é o passo

```
n = length(t); RES = 10; p = 0.25; arredonda_x = y(round(n*p):RES:n,1);  
arredonda_y = y(round(n*p):RES:n,2); arredonda_z = y(round(n*p):RES:n,3);
```

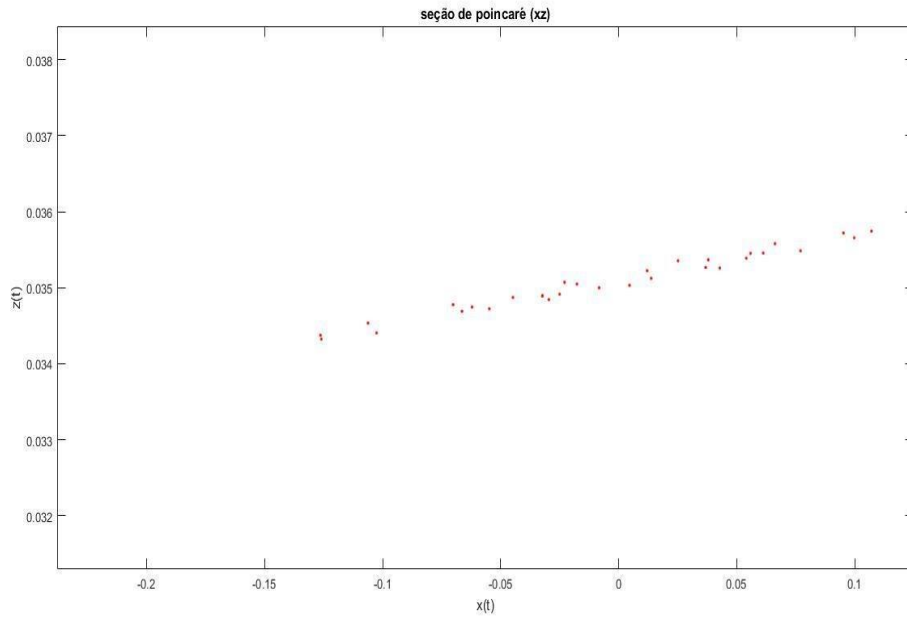
Fonte: Acervo próprio

Gráfico 5. (a) Simulação do sistema de Rössler em t=15 s (b) Corte transversal feito no sistema de Rössler, os cruzamentos do sistema com o plano resultam em pontos mostrados no gráfico



(a)

(b)

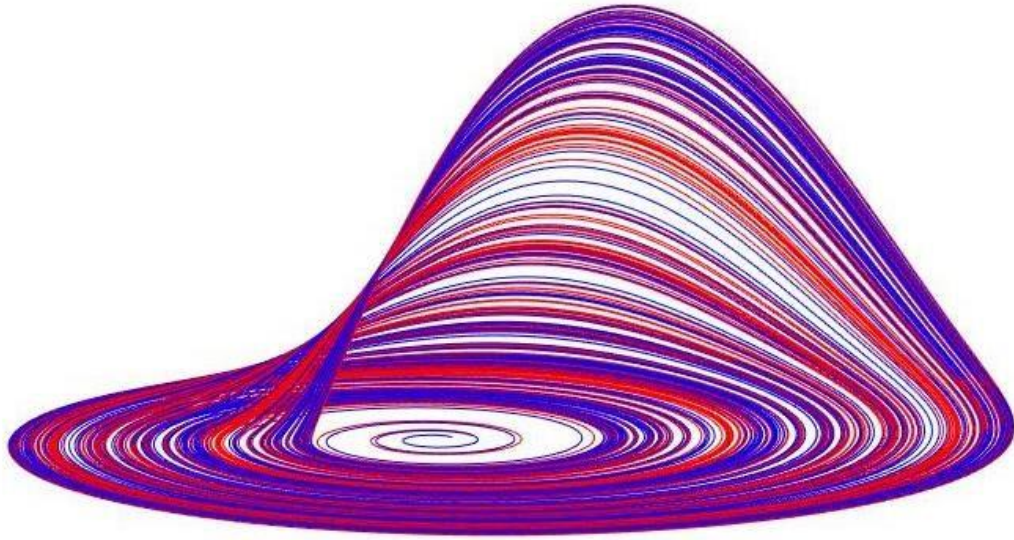


Fonte: Acervo próprio

Os pontos retirados do gráfico 5 (a) e colocados como seção de corte no gráfico 5 (b) percebe-se a seção de Poincaré criada e os pontos de entrada que perfuram o “plano” nunca se tangenciam.

A imagem 7 demonstra a evolução do sistema de equações de Rössler em dois sistemas de equações e mostra que mesmo com valores iniciais distintos para x estas equações continuam, após um determinado tempo, a apresentar o atrator.

Imagem 7. Atrator de Rössler após 1000 segundos de simulação, a linha de cor azul representa um atrator com 0.5 de valor inicial para x e a linha da cor vermelha representa um atrator com 1.0 de valor inicial de x



Fonte: Acervo próprio

CONCLUSÃO

Após a análise gráfica em diferentes condições de valores para as constantes, tanto para as constantes x , y e z e também para as constantes a , b e c , percebendo que as alterações pequenas estavam influenciando o conjunto final dos resultados, e voltando para a teoria de E. N. Lorenz que enfatizou em seu artigo sobre o que foi chamado de efeito borboleta, onde descreve exatamente este comportamento, mudanças extremamente pequenas no ponto de início conseguem ocasionar grandes alterações no futuro. Aliado à seção de corte promovida, que representou uma seção de Poincaré, demonstrando que os pontos de partida que perfuram o plano nunca se tangenciam. E finalmente a análise dos modelos em 3 dimensões em que apresentavam condições iniciais distintas, porém apresentaram em todos os gráficos o contorno em volta de uma espécie de “buraco” que se denomina atrator. Podemos então depois de apresentado todas estas simulações e seguindo o paralelo teórico apresentado por vasta bibliografia, indicar que o modelo de Otto E. Rössler, representa em seu sistema de equações diferenciais de fato um atrator estranho.

REFERÊNCIAS

- GULICK, Denny: Encounter with chaos. Estados Unidos: McGraw-Hill, Inc, 1992.
- HANSELMAN, D., LITTLEFIELD, B.: Matlab 6: Curso completo. São Paulo: Pearson, 2004.
- LEYS, J., GHYS, É., ALVAREZ, A.: Chaos: Uma aventura matemática. Disponível em: <<http://www.chaos-math.org/pt-br>> Acesso em 20 de julho de 2017.

LORENZ, E. N.: Deterministic Nonperiodic Flow. Massachusetts: Journal of the atmospheric sciences: volume 20, 1963.

MATSUMOTO, E. Y.: Matlab R2013a: teoria e programação guia pratico. São Paulo: Editora Érica, 2013.

MOLER, Cleve: Ordinary Differential Equation Solvers ODE23 and ODE45. MathWorks, 2014. Disponível em : <<https://blogs.mathworks.com/cleve/2014/05/26/ordinary-differentialequation-solvers-ode23-and-ode45/>> Acesso em 24 de julho de 2017.

PEITGEN, Heinz-Otto, JÜRGENS, H., SAUPE, D.: Fractals for the classroom: part two complex systems and Mandelbrot set. Nova York: Springer-Verlag, 1992.

PRIGOGINE, Ilya: As leis do caos. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

RÖSSLER, Otto E.: An equations for continuous chaos. Alemanha: Physics letters, 1976.

SPROTT, Julien Clinton: A tribute to Dr. Edward Norton Lorenz. Ec Jornal: Winter, 2008.

VIANA, Marcelo: O premiado matemático Marcelo Viana fala sobre teoria do caos. Galileu, 2016. Disponível em : <<http://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2016/07/o-premiadomatematico-marcelo-viana-fala-sobre-teoria-do-caos.html>> Acesso em 23 de julho de 2017.

WILSON, H. B., TURCOTTE, L. H., HALPERN, D.: Advanced mathematics and mechanics applications using matlab. Florida: Chapman & Hall/Crc, 2000.

E-MAIL PARA CONTATO

José Ignacio Hernández López: jihlpez@gmail.com

Felipe Ezsias Fiumarelli: felipezsias@gmail.com