

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE
Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação - Coordenadoria de Fomento à Pesquisa

**ANÁLISE DA DETERMINAÇÃO DA MAIORIA GLOBAL
EM REDES DE AUTÔMATOS COM A REGRA DA
MAIORIA LOCAL**

GILBERTO DE MELO JÚNIOR¹

Apoio: PIBIC CNPq

PEDRO PAULO BALBI DE OLIVEIRA²

Orientador

Faculdade de Computação e Informática (FCI)

10419275@mackenzista.com.br¹

pedropaulo.oliveira@mackenzie.br²

São Paulo - SP, Brasil

2025

Resumo

Este trabalho investigou a robustez estrutural de redes de autômatos sob a dinâmica da Regra da Maioria, com foco na Tarefa de Classificação de Densidade (DCT). Utilizando simulações exaustivas em grafos completos direcionados de diferentes ordens $3 \leq n \leq 20$, analisou-se o impacto da remoção progressiva de arestas sobre a capacidade de convergência para o consenso. Os resultados mostraram três regimes distintos: para $n < 7$, não há padrão sigmoide de transição; para $n \geq 7$, a perda de eficácia é bem descrita por uma função logística; e para $n = 3$, o comportamento é ruidoso e não modelável. A extração dos parâmetros do modelo revelou que o ponto de inflexão (x_0) cresce de forma regular com n , podendo ser previsto por um modelo quadrático, enquanto a inclinação da curva (k) apresenta forte oscilação, ajustando-se melhor a um modelo cúbico limitado ao intervalo observado. Estes resultados demonstram que a robustez de redes emerge como uma transição de fase previsível apenas acima de um limiar crítico de tamanho, revelando limites fundamentais da modelagem analítica e abrindo caminhos para abordagens de aprendizado de máquina na previsão da dinâmica de falhas em sistemas distribuídos de consenso.

Palavras-chave: Regra da maioria. Redes complexas. Robustez estrutural. Função logística.

Abstract

This study investigated the structural robustness of automata networks under the Majority Rule dynamics, focusing on the Density Classification Task (DCT). Through exhaustive simulations on complete directed graphs of different orders ($3 \leq n \leq 20$), the impact of progressive edge removal on consensus convergence was analyzed. Results revealed three distinct regimes: for $n < 7$, no sigmoidal transition pattern emerges; for $n \geq 7$, the loss of effectiveness is well described by a logistic function; and for $n = 3$, the behavior is noisy and non-modelable. Parameter extraction showed that the inflection point (x_0) increases regularly with n , fitting well into a quadratic model, whereas the slope (k) exhibits strong oscillations, better approximated by a cubic model restricted to the observed range. These findings demonstrate that network robustness emerges as a predictable phase transition only beyond a critical size threshold, revealing fundamental limits of analytical modeling and opening pathways for machine learning approaches in predicting failure dynamics of distributed consensus systems.

Keywords: Majority rule. Complex networks. Structural robustness. Logistic function.

1 INTRODUÇÃO

O estudo de dinâmicas em redes de autômatos tem se tornado uma ferramenta fundamental na compreensão de sistemas complexos. A dinâmica da Regra da Maioria, *majority rule*, destaca-se pela simplicidade estrutural e a variedade de comportamentos emergentes (WOLFRAM, 2002) (MITCHELL; CRUTCHFIELD; HRABER, 1994). No contexto de grafos direcionados, particularmente, surgem desafios adicionais relacionados à conectividade, estabilidade estrutural e sensibilidade a perturbações topológicas, tornando esse modelo um objeto relevante de investigação teórica e computacional.

Essa simplicidade, aliada à capacidade de gerar comportamentos coletivos complexos, também torna a Regra da Maioria um modelo relevante para descrever dinâmicas sociais, ecológicas e cognitivas. Diversos trabalhos em dinâmica de opiniões mostram como regras de atualização locais podem levar à emergência de padrões globais de consenso, mesmo em populações heterogêneas, como discutido por Sîrbu et al. (2016) e Monica e Bergenti (2014).

Apesar de algumas topologias de grafos serem completamente estáveis sob a dinâmica da maioria, ou seja, convergem para o consenso independentemente da configuração inicial (DE OLIVEIRA, 2014), a questão da sua robustez estrutural ainda é pouco explorada diante de falhas ou perturbações. Esta pesquisa investiga como a remoção aleatória de arestas afeta a capacidade de um grafo, previamente estável, de manter essa propriedade. Através de simulações computacionais, modelamos o comportamento que é resultante de sucessivas remoções de arestas em diferentes grafos direcionados, e desta forma, quantificando a probabilidade de perda de estabilidade à medida que a estrutura é alterada. Essa abordagem tem o objetivo de compreender a tolerância da estrutura desses sistemas e explorar padrões de robustez emergente.

2 PROBLEMA DE PESQUISA

Uma rede de autômatos pode ser representada por um grafo (GRATTAROLA; LIVI; ALIPPI, 2021) definido com uma tupla (G, S, N, δ) onde $G = (V, E)$ é um grafo com um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E , S é o conjunto de estados possíveis, $N : V \rightarrow 2^V$ é a função da vizinhança e δ é a regra de transição local. Um grafo completo é um tipo específico de grafo em que todos os pares distintos de vértices estão conectados por uma aresta (BANG-JENSEN; GUTIN, 2018). Pode-se entender que em um grafo completo a conectividade é homogênea entre todos os vértices. Isso quer dizer que a função da vizinhança em um grafo completo atribui cada vértice um conjunto de vizinhos que inclui todos os outros vértices do grafo.

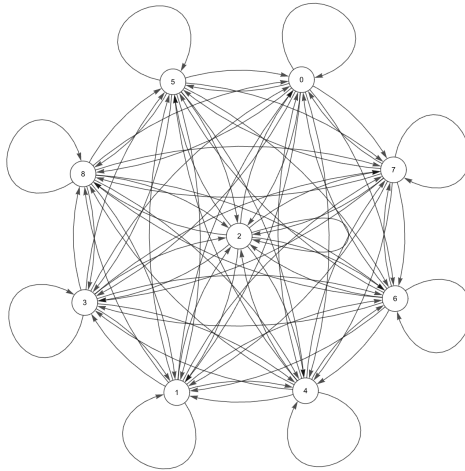


Figura 1: Exemplo de grafo completo direcionado com 9 nós, incluindo self-loops. Cada nó está conectado a todos os outros, inclusive a si mesmo, totalizando 81 arestas direcionadas. Essa estrutura é útil em simulações onde cada elemento interage com todos os demais, como em modelos totalmente conectados de dinâmica de autômatos celulares.

Uma abordagem para estudar a convergência global de um sistema sob a Regra da Maioria é a Tarefa de Classificação de Densidade (*Density Classification Task - DCT*). A DCT propõe que um sistema de autômatos binários distribuídos sobre uma rede deve convergir para uma configuração final de todos os vértices no estado 1, quando a configuração inicial contém maioria de 1s, e para uma configuração de todos os vértices no estado 0, caso contrário (DE OLIVEIRA, 2014). Diferentemente da formulação original em autômatos celulares unidimensionais, aqui os vizinhos de cada vértice são definidos pela estrutura do grafo subjacente, o que introduz novas complexidades topológicas ao problema.

A conectividade de um grafo influencia a performance da DCT. O aumento do grau médio, mantendo-se constante a ordem do grafo, resulta em maior eficácia da DCT (ABILHOA; DE OLIVEIRA, 2020). Neste contexto, este trabalho buscou analisar como a eficácia da DCT se comporta quando a estrutura de um grafo completo é degradada pela remoção aleatória de arestas. Essa abordagem permite investigar a resiliência do sistema a perturbações estruturais e entender os limites da convergência para o consenso global. Ademais, é interessante a adoção de um modelo que possa representar este problema.

Para investigar essa relação, este trabalho propõe um modelo matemático que descreve a degradação da performance em função da remoção de arestas. A hipótese central é que a relação entre a quantidade de arestas removidas e a taxa de sucesso DCT pode ser bem representada por uma função logística, caracterizando uma transição de fase de um estado resiliente para um de colapso da convergência.

A metodologia empregada envolveu simulações computacionais em grafos completos

de diferentes ordens, em que a performance da DCT foi mensurada a cada etapa de degradação estrutural. Os parâmetros do modelo logístico ajustado aos dados, especificamente o ponto de inflexão (x_0), que representa o limiar crítico de arestas removidas, e a inclinação da curva (k), que denota a rapidez da transição, foram então analisados em função do tamanho do grafo.

O objetivo final é fornecer um modelo preditivo que não apenas descreva o colapso da capacidade de consenso, mas também permita antecipar o comportamento de sistemas maiores sob perturbações estruturais, contribuindo para o entendimento da robustez em redes complexas.

A Figura 1 apresenta um exemplo de grafo completo direcionado com 9 nós, incluindo *self-loops*, onde cada nó está conectado a todos os outros, totalizando 81 arestas direcionadas. Essa estrutura é utilizada como topologia base nas simulações de dinâmica de autômatos celulares sob a Regra da Maioria.

3 METODOLOGIA

3.1 Definição do Modelo

Neste trabalho, o sistema dinâmico analisado é modelado por uma rede de autômatos representada pela tupla:

$$\mathcal{R} = (G, S, N, \delta) \quad (1)$$

em que:

- $G = (V, E)$ é um grafo direcionado, com V representando um conjunto de vértices e $E \subseteq V \times V$ o conjunto de arestas direcionadas;
- $S = 0, 1$ é o conjunto de estados possíveis de cada vértice;
- $N : V \rightarrow 2^V$ é a função de vizinhança que, para cada vértice $v_i \in V$, retorna o conjunto de seus vizinhos de entrada (*in-neighbors*), ou seja, os vértices que possuem arestas direcionadas para v_i ;
- $\delta : S^{|N(v_i)|+1} \rightarrow S$ é a regra de transição local, que atualiza o estado de v_i com base em seu próprio estado e nos estados de seus vizinhos.

A regra de transição utilizada é a Regra da Maioria local, formalizada como:

$$\delta(v_i) = \begin{cases} 1, & \text{se } \sum_{v_j \in N(v_i)} s(v_j) + s(v_i) > \frac{|N(v_i)| + 1}{2} \\ 0, & \text{se } \sum_{v_j \in N(v_i)} s(v_j) + s(v_i) < \frac{|N(v_i)| + 1}{2} \\ s(v_i), & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2)$$

A equação acima dita a dinâmica de atualização de cada vértice na rede. Em cada passo de tempo, o estado futuro de um vértice v_i é determinado por uma votação que inclui seu próprio estado atual e os estados de todos os seus vizinhos diretos, definidos por $N(v_i)$.

Essencialmente, se a quantidade de '1's nesse grupo local for estritamente maior que a quantidade de '0's, o vértice v_i adotará o estado 1 em sua próxima atualização. Inversamente, se a maioria for de '0's, ele adotará o estado 0. A terceira condição é o critério de desempate: no caso de uma divisão igualitária de '0's e '1's (o que só pode ocorrer se o tamanho do grupo local for par), o vértice mantém seu estado atual, $s(v_i)$. Esse mecanismo de inércia é crucial, pois impede que o vértice mude de estado com base em um sinal local ambíguo, favorecendo a estabilidade do sistema.

A dinâmica da rede $\mathcal{R}$ é executada de forma síncrona: todos os vértices atualizam seus estados simultaneamente a cada passo temporal, com base na configuração anterior. A evolução do sistema prossegue até que um estado fixo seja alcançado: uma configuração que nenhum vértice altera seu estado.

3.2 Procedimento de Simulação

A simulação tem como objetivo avaliar a robustez da eficácia da DCT em redes de autômatos e parte da remoção progressiva de arestas. Para isso, cada experimento segue as seguintes etapas:

1. Seleção da rede original

Neste experimento, todas as redes originais foram grafos completos com o número de vértices n definido previamente.

2. Geração das configurações iniciais

Define-se o conjunto C_0 de configurações iniciais. Cada configuração é um vetor $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S^n$, onde $s_i \in \{0, 1\}$ representa o estado inicial do vértice v_i . Para cada grafo, foram geradas 2^n configurações possíveis, de forma exaustiva, garantindo uma análise completa da eficácia da rede. Contudo, como o número de configurações cresce exponencialmente com n , essa abordagem rapidamente se torna inviável do ponto de vista computacional. Por exemplo, enquanto para $n = 9$ há 512 configurações possíveis,

para $n = 11$ esse número já salta para 2048. Inicialmente, optou-se por restringir os experimentos a valores $n \leq 11$. Porém graças à implementação das simulações em GPU com *PyTorch*, foi possível simular, em tempo aceitável, redes com até 20 nós, permitindo processar de forma exaustiva as $2^{20} = 1048576$ configurações.

3. Execução da dinâmica da maioria

Cada configuração inicial é aplicada à rede $\mathcal{R}$, e a Regra da Maioria local δ é iterada até que o sistema alcance um estado fixo. A convergência é classificada como correta se o sistema final estiver todo em 1 (quando o número de 1s for maior que o de 0s) ou todo em 0 (caso contrário). A eficácia da rede é então dada por:

$$\varepsilon = \frac{k}{c} \quad (3)$$

em que:

- k é o número de configurações corretamente classificadas;
- $c = |C_0|$ é o número total de configurações testadas.

4. Remoção progressiva de arestas

Após calcular ε_0 da rede original, inicia-se a etapa da degradação estrutural. A cada iteração, uma aresta $e \in E$ é removida aleatoriamente do grafo, gerando uma nova rede $\mathcal{R}_i$. Em seguida, repete-se a simulação da DCT sobre $\mathcal{R}_i$, obtendo uma nova medida de eficácia ε_i . Esse processo se repete até que o grafo atinja um limite inferior de conectividade ou até que todas as arestas tenham sido removidas.

5. Repetições e média

Para mitigar a aleatoriedade nas remoções, cada experimento completo é repetido r vezes com diferentes ordens de remoção. Os valores da eficácia ε_i são então agregados por média, mediana e desvio padrão para análise estatística.

3.3 Métrica de Robustez

Um dos principais objetivos deste trabalho é avaliar o quão resistente uma rede de autômatos permanece frente à degradação de sua estrutura. Como o desempenho do sistema é medido pela eficácia da DCT (Density Classification Task), é natural buscar uma métrica que quantifique a capacidade da rede de manter essa eficácia à medida que suas arestas são removidas.

Para isso, define-se uma métrica de robustez funcional baseada no comportamento da eficácia durante um processo de degradação progressiva da topologia. Esse processo inicia-se

com a rede original, denotada por $\mathcal{R}_0$, e prossegue com a remoção aleatória de uma aresta por vez, produzindo uma sequência de redes $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2, \dots, \mathcal{R}_m$, onde m representa o número total de arestas removidas.

Em cada etapa i , calcula-se a eficácia ε_i da rede $\mathcal{R}_i$, aplicando a dinâmica da maioria sobre um conjunto fixo de configurações iniciais. O resultado é uma sequência de valores $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$, que refletem o desempenho da rede ao longo de diferentes níveis de degradação estrutural.

A robustez acumulada da rede é então definida como a média desses valores de eficácia:

$$Robustez(\mathcal{R}) = \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m \varepsilon_i \quad (4)$$

Essa equação expressa a eficácia média da rede durante todo o processo de degradação. O somatório computa o total de desempenho obtido em todas as versões intermediárias da rede, e a divisão por $m+1$ normaliza o valor em relação ao número de etapas consideradas (incluindo a rede original). Redes com valores altos de robustez mantêm ε_i próximos de 1 mesmo após várias remoções, enquanto redes frágeis apresentam quedas abruptas, resultando em valores médios baixos.

Essa métrica tem a vantagem de ser simples, intuitiva e diretamente derivada das simulações. No entanto, ela resume o comportamento da rede em um único valor agregado e não oferece informações sobre quando ou como o colapso funcional ocorre. Duas redes diferentes podem apresentar a mesma robustez média, mas com padrões de degradação muito distintos, uma com perda gradual de desempenho e outra com queda súbita após um ponto crítico.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Estrutura dos Experimentos

Os experimentos foram conduzidos no ambiente *Mathematica* utilizando a *Wolfram Language* (WOLFRAM. . ., 2024) com redes de autômatos definidas sobre topologias de grafos direcionados. O número de vértices analisado variou entre $n = 3$ e $n = 20$, com simulações completas das 2^n configurações iniciais possíveis para garantir uma análise exaustiva do comportamento do sistema. As etapas do experimento são as seguintes:

1. Construção de grafos completos direcionados: Para cada tamanho de grafo desejado, cria-se um grafo onde cada nó possui arestas direcionadas para todos os outros nós.
2. Geração da matriz de adjacência: A matriz de adjacência do grafo é extraída e convertida para formato numérico.

3. Simulação da Regra da Maioria: Para cada configuração inicial binária de estados nos nós, aplica-se a dinâmica iterativa da Regra da Maioria até atingir um estado estável. Então, verifica-se se a rede converge para um estado homogêneo (consenso).
4. Cálculo da DCT: Compara-se o estado final com a maioria do estado inicial e registra-se se a dinâmica foi capaz de resolver corretamente a DCT.
5. Remoção progressiva de arestas: A cada rodada, é removida aleatoriamente uma aresta. Após cada remoção, a simulação completa é repetida para todas as configurações iniciais.
6. Registro da quantidade de convergências: Após cada rodada de remoção, registra-se quantas configurações ainda levam ao consenso.
7. Amostragem estatística: Para cada grau de remoção, o experimento é repetido em várias amostras independentes para obter dados estatísticos confiáveis.
8. Armazenamento dos resultados: Os dados de cada simulação, incluindo amostra, rodada, número de arestas removidas e quantidade de convergências, são armazenados em arquivos para a análise posterior.

4.2 Padrão de Decaimento da Eficácia

A degradação progressiva da estrutura dos grafos por remoção aleatória de arestas tem como objetivo observar o colapso da capacidade de convergência global sob a Regra da Maioria. No entanto, os resultados obtidos não revelam um padrão único de comportamento, mas sim três regimes distintos, fortemente dependentes do número de vértices da rede. Essa diferenciação é essencial para compreender a validade e os limites do modelo adotado para ajustar a curva de eficácia em função do número de arestas removidas.

Nos casos em que $n \geq 7$, observa-se uma transição bem caracterizada entre dois regimes funcionais: um regime inicial de alta robustez, em que a maioria das configurações ainda convergem corretamente mesmo após várias remoções, e um regime final de falência estrutural, onde a eficácia é próxima de zero. A transição entre esses dois regimes ocorre de forma abrupta em torno de um ponto crítico bem definido. Esse padrão se manifesta graficamente por uma curva sigmoide suave, com inflexão pronunciada e zonas bem separadas de estabilidade e colapso. Nessas condições, o modelo logístico se mostra adequado para capturar tanto a posição quanto a forma da transição, permitindo a extração confiável dos parâmetros k e x_0 que caracterizam a velocidade e o limiar de colapso.

Já nos casos intermediários, como $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$, a rede não apresenta uma fase inicial de resiliência. A eficácia começa a decair desde as primeiras remoções, sem indícios de platôs ou zonas de estabilidade local. A forma da curva se aproxima mais de um decaimento

exponencial contínuo, sugerindo que cada remoção contribui, em média, de maneira semelhante para a perda de convergência. Nessas situações, o ajuste logístico se torna instável, frequentemente retornando parâmetros inconsistentes ou sem interpretação física plausível, como valores negativos para o ponto de inflexão x_0 . A ausência de um comportamento transitório diferenciado entre regimes robusto e frágil torna inadequada a aplicação direta do modelo sigmoide, sendo preferível, nesses casos, empregar modelos alternativos como exponenciais ou funções log-lineares.

A Figura 2 ilustra os diferentes comportamentos descritos, apresentando os gráficos de eficácia média em função das arestas removidas para cada valor de n entre 3 e 20, bem como as curvas de ajuste logístico utilizadas. Observa-se claramente que apenas a partir de $n = 7$ os dados passam a exibir o perfil sigmoide esperado, validando a aplicação do modelo logístico nessa faixa.

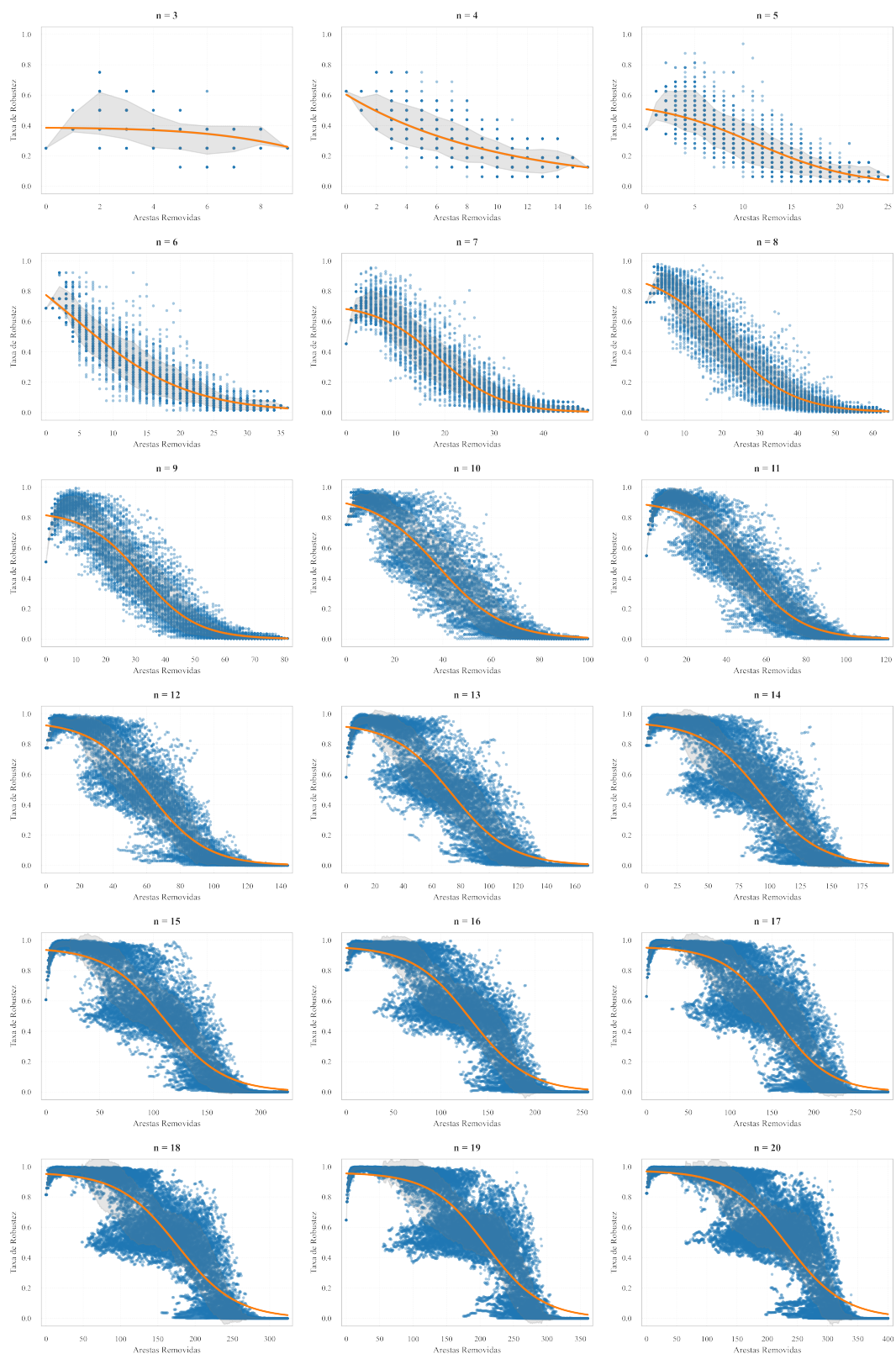


Figura 2: Ajuste da curva logística para diferentes tamanhos de grafo ($n = 3$ a $n = 20$). Nota-se que para $n < 7$, o padrão de decaimento não apresenta comportamento sigmoide, enquanto para $n \geq 7$, o modelo se ajusta bem ao perfil da transição.

Por fim, o caso $n = 3$ exibe um comportamento altamente ruidoso e sempre padrão discernível de transição. A dispersão entre amostras é significativa e a oscilação da eficácia em função das remoções não permite traçar uma curva de tendência coerente. Isso decorre da própria natureza combinatória restrita do sistema: com apenas 8 configurações iniciais possíveis, pequenas variações estruturais alteram de forma imprevisível o resultado agregado. Para esse valor de n , qualquer tentativa de ajuste contínuo é desnecessária.

A Figura 2 ilustra os diferentes comportamentos descritos, apresentando os gráficos de eficácia média em função das arestas removidas para cada valor de n entre 3 e 20, bem como as curvas de ajuste utilizadas. Observa-se claramente que apenas a partir de $n = 7$ os dados passam a exibir o perfil sigmoide esperado, validando a aplicação do modelo logístico nessa faixa.

Portanto, embora a proposta original desta pesquisa tenha partido da hipótese de que o colapso da robustez estrutural poderia ser descrito genericamente por uma função logística, os dados revelam que isso só se verifica plenamente para redes com $n \geq 7$. Abaixo desse limiar, os grafos já começam frágeis o suficiente para que o processo de degradação atue de forma direta e acumulativa, sem uma transição clara entre regimes. Esse resultado não apenas destaca a limitação do modelo, como também reforça a necessidade de uma abordagem diferenciada para grafos de pequena ordem, onde a modelagem precisa considerar o impacto individual de cada aresta na estabilidade global.

Conforme discutido, o padrão de transição sigmoide só se manifesta de forma consistente em redes com $n \geq 7$. Para esse intervalo, a dinâmica de perda de eficácia pode ser representada com precisão por uma função logística, cuja forma analítica é dada por:

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}} \quad (5)$$

em que:

- $f(x)$ é a eficácia da rede após a remoção de x arestas.
- L representa o valor máximo, *carrying capacity*, da função. Ele determina o limite superior da curva.
- x_0 (ponto de inflexão) representa o ponto de quebra da rede, ou seja, o número de arestas removidas que leva a eficácia a 50% do seu valor inicial. Este parâmetro serve como a principal métrica quantitativa da robustez da rede.
- k (inclinação) descreve a abruptude da transição. Valores mais altos de k indicam um colapso mais rápido do sistema após atingir a vizinhança do ponto de quebra.

Dado que os casos com $n < 7$ não apresentam o comportamento de transição sigmoide

característico, a análise matemática da função logística e dos parâmetros k e x_0 será restrita aos valores de $7 \leq n \leq 20$, onde o modelo se mostrou empiricamente válido.

4.3 Extração dos Parâmetros k e x_0

Para cada valor de $n \in \{7, \dots, 20\}$, foram extraídos os parâmetros k (inclinação da curva) e x_0 (ponto de inflexão) por meio do ajuste de uma função logística à relação entre o número de arestas removidas e a robustez média dos grafos. Esses parâmetros caracterizam a sensibilidade estrutural da rede sob a dinâmica da Regra da Maioria.

Os dados brutos utilizados foram previamente gerados em *Wolfram Language (Mathematica)* a partir de simulações da dinâmica da Regra da Maioria em grafos direcionados. Cada arquivo gerado contém, para um valor fixo de n , diversas amostras com diferentes quantidades de arestas removidas. Para cada amostra, foram registrados os número de configurações convergentes e o número total de configurações testadas, possibilitando o cálculo da taxa de robustez média em função de x = número de arestas removidas.

A extração dos parâmetros foi realizada em *Python* com as bibliotecas *pandas*, *NumPy* e *Scipy*, seguindo as etapas abaixo:

1. Filtragem por tamanho de amostra: Para assegurar comparabilidade entre diferentes valores de n , foi selecionado um subconjunto de dados com tamanho de amostra fixo.
2. Ajuste da curva logística: Com os pares (x, y) , onde x representa o número de arestas removidas e y a robustez média, como já mostrado em 5.
O ajuste foi realizado por meio do método dos mínimos quadrados, utilizando a função `curve_fit` da biblioteca `scipy.optimize`, com condições iniciais $k = 1.0$ e $x_0 = \text{mediana}(x)$, e um número máximo de iterações fixado em 10.000.
3. Armazenamento dos parâmetros: Os valores ajustados de k e x_0 foram registrados para cada valor de n , permitindo posterior análise comparativa entre tamanhos de grafo.

Os resultados na Tabela 1 mostram uma tendência clara de crescimento de x_0 com o aumento de n , sugerindo que grafos maiores exigem uma quantidade proporcionalmente maior de arestas removidas para colapsar sua robustez estrutural média. Em paralelo, o parâmetro k diminui com o aumento de n , o que indica uma transição mais gradual entre os regimes de robustez total e falha.

Tabela 1: Parâmetros k e x_0 extraídos da função logística ajustada para cada valor de $n \geq 7$.

n	k	x_0
7	-0.1565	18.7060
8	-0.1098	20.5823
9	-0.1076	31.9128
10	-0.0746	38.4438
11	-0.0710	49.7886
12	-0.0583	61.3812
13	-0.0489	74.1852
14	-0.0423	93.2543
15	-0.0367	110.6040
16	-0.0326	131.6235
17	-0.0314	155.9656
18	-0.0254	176.0332
19	-0.0240	209.3591
20	-0.0211	232.5870

Esses parâmetros sintetizam a resposta do sistema a perturbações topológicas, oferecendo uma base quantitativa para a análise da resiliência estrutural de redes sob a Regra da Maioria

4.4 Análise da Variabilidade dos Parâmetros de Robustez

A Tabela 1 apresenta os valores de k e x_0 obtidos a partir do ajuste da função logística para cada $n \geq 7$ e $n \leq 20$. A observação conjunta desses parâmetros permite compreender como a dinâmica de convergência da Regra da Maioria se transforma à medida que o tamanho da rede aumenta. Ambos variam de maneira sistemática, ainda que de formas diferentes, o que justifica a adoção de modelos específicos para cada caso.

No caso de x_0 , percebe-se um crescimento contínuo e bem definido, que se intensifica para valores maiores de n . Esse comportamento indica que o ponto médio da curva logística acompanha de forma previsível o aumento do número de vértices. A análise quantitativa mostrou que o modelo polinomial de grau dois fornece um ajuste adequado para a progressão no intervalo dos valores de n . Essa relação sugere que a complexidade estrutural das redes ampliam o "limiar" necessário para que a Regra da Maioria mantenha um desempenho elevado, o que é consistente com o aumento do espaço de configurações possíveis.

Já para k , a situação é diferente. Os valores flutuam mais, refletindo a sensibilidade do parâmetro à estrutura local das redes e à forma como as decisões majoritárias se propagam.

Apesar dessas oscilações, a análise de erro relativo evidencia que o modelo cúbico captura de forma robusta a tendência geral. O ajuste não apenas descreve a queda progressiva de k com o aumento de n , mas também incorpora variações intermediárias que modelos mais simples (linear, logarítmico, exponencial ou quadrático) não conseguem representar satisfatoriamente. Isso mostra que, embora k seja mais volátil que x_0 , essa volatilidade não é aleatória: ela segue um padrão mais complexo que o polinômio cúbico consegue representar com boa precisão.

Tabela 2: Erro relativo (%) dos modelos para $x_0(n)$. Os valores em negrito indicam o menor erro relativo em cada coluna, ou seja, o modelo com melhor desempenho para aquele valor de n .

Modelo	n													
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Linear	140,51	56,17	19,72	9,82	18,14	22,87	24,04	16,47	13,21	7,74	1,57	0,58	8,48	10,48
Logarítmico	216,45	75,57	10,14	29,62	38,52	40,82	38,18	25,88	18,66	9,55	0,26	4,65	14,64	18,74
Exponencial	43,69	54,77	18,30	16,38	6,50	2,38	0,39	5,35	5,42	5,81	5,80	1,08	1,43	5,15
Quadrático	1,81	11,71	7,21	0,56	1,91	0,11	2,51	0,65	0,58	0,16	0,99	1,69	1,80	0,68
Cúbico	2,62	11,65	6,99	0,29	1,71	0,22	2,55	0,68	0,51	0,08	1,06	1,65	1,80	0,74

Tabela 3: Erro relativo (%) dos modelos para $k(n)$. Os valores em negrito indicam o menor erro relativo em cada coluna, ou seja, o modelo com melhor desempenho para aquele valor de n .

Modelo	n													
	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Linear	25,07	1,18	7,33	21,77	15,49	25,52	31,84	31,46	27,61	16,67	7,10	19,94	51,93	87,06
Logarítmico	16,46	4,98	5,60	19,64	10,05	16,65	20,22	18,49	14,78	6,22	12,33	17,90	39,26	59,16
Exponencial	7,82	10,62	4,98	15,27	1,90	4,42	1,92	2,00	0,98	6,13	18,09	14,88	24,14	27,34
Quadrático	9,24	10,98	3,79	16,66	2,08	2,66	10,64	4,58	8,77	12,60	19,24	4,95	3,63	30,37
Cúbico	4,18	11,53	7,19	9,38	5,33	3,71	2,09	1,44	1,36	3,57	1,94	1,09	1,09	7,20

Como visto anteriormente, a Tabela 1 apresenta os valores observados de k e x_0 obtidos a partir dos ajustes logísticos para cada valor de n . A Tabela 2 e a Tabela 3, respectivamente, comparam o desempenho de diferentes modelos matemáticos ajustados separadamente a $x_0(n)$ e $k(n)$, utilizando como métrica de erro o erro quadrático médio (MSE).

Os resultados demonstram que não existe um único modelo que minimize consistentemente o erro para todos os valores de n . Em muitos casos, modelos distintos apresentaram o melhor ajuste local para diferentes trechos da curva. Por exemplo, o parâmetro k apresentou comportamento não uniforme: em certos intervalos de n , crescia, em outros, diminuía ou oscilava, indicando que sua variação não segue uma tendência simples. Já o parâmetro x_0 apresentou crescimento mais suave e previsível, mas ainda assim variou entre ajustes lineares e polinomiais de grau 3 ou 3 como melhores candidatos, dependendo do intervalo considerado.

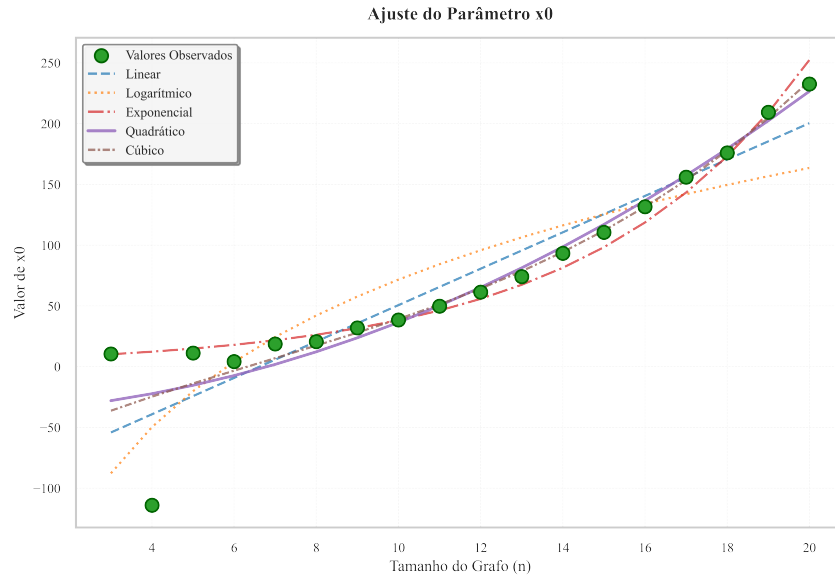


Figura 3: Ajuste de diferentes modelos matemáticos ao parâmetro x_0 em função do número de vértices n . Os pontos verdes representam os valores observados experimentalmente. As curvas correspondem aos ajustes linear, logarítmico, exponencial, quadrático e cúbico. O parâmetro x_0 apresenta crescimento regular e suave, sendo bem capturado pelo modelo quadrático (curva roxa sólida), que fornece o melhor equilíbrio entre simplicidade e precisão preditiva.

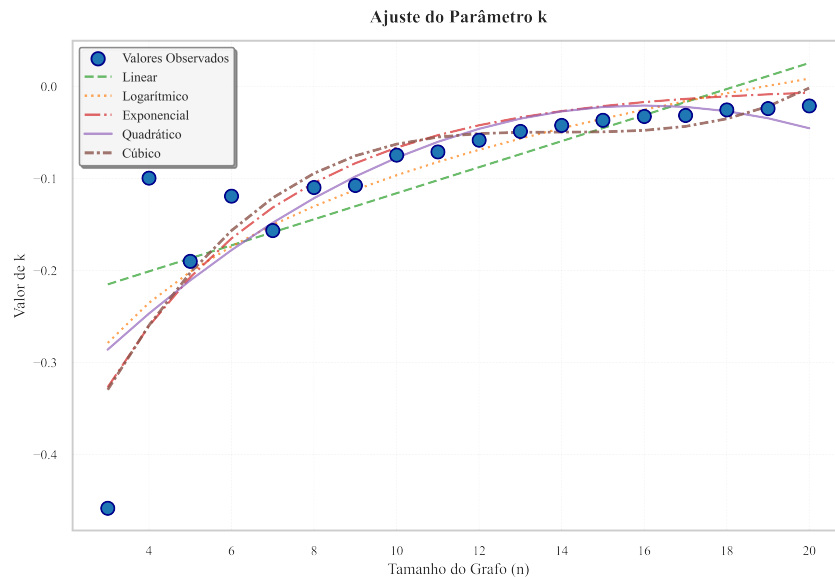


Figura 4: Ajuste de diferentes modelos matemáticos ao parâmetro k em função do número de vértices n . Os pontos azuis representam os valores observados experimentalmente. As curvas correspondem aos ajustes linear, logarítmico, exponencial, quadrático e cúbico. O parâmetro k apresenta comportamento oscilatório e irregular, sendo melhor aproximado pelo modelo cúbico (curva marrom tracejada), embora este não elimine completamente as flutuações locais características de $k(n)$.

Essa heterogeneidade de desempenho sugere que a relação entre n e os parâmetros da curva logística é localmente modelável, mas globalmente irregular, o que inviabiliza a adoção de um modelo preditivo universal. A Figura 3 ilustra essa inconsistência ao apresentar a superposição dos ajustes para $x_0(n)$, destacando a dispersão entre os modelos. Já a Figura 4 evidencia o comportamento errático de $k(n)$, com regiões em que diferentes ajustes apresentam desempenho semelhante e outras com divergência marcante.

4.5 Interpretação do Ponto de Inflexão $x_0(n)$

Apesar das limitações apontadas, o parâmetro x_0 revelou maior regularidade em sua evolução com o aumento de n , quando comparado ao parâmetro k . O ponto de inflexão, como já discutido, representa o número aproximado de arestas removidas que leva a eficácia da rede à metade de seu valor original, funcionando como um indicador direto da robustez estrutural, em analogia com as transições de fase dinâmica descrita em autômatos celulares sobre grafos esparsos por Behrens, Hudcová e Zdeborová (2023), na quais mudanças abruptas no comportamento global ocorrem a partir de alterações graduais em parâmetros estruturais.

Entre os modelos testados, o modelo quadrático apresentou o melhor equilíbrio entre simplicidade e capacidade preditiva, capturando a tendência geral de crescimento sem oscilação excessiva. Esse modelo pode ser expresso como:

$$x_0(n) = \alpha n^2 + \beta n + \gamma \quad (6)$$

com os coeficientes ajustados $\alpha = 0.997939$, $\beta = -10.345129$, e $\gamma = 41.884553$ (valores obtidos a partir da regressão sobre os dados experimentais).

Esse modelo permite realizar inferências para valores de n além do intervalo experimental. A Tabela 4 apresenta previsões obtidas para $n = 21 \dots 25$.

Tabela 4: Valores previstos para $x_0(n)$ no intervalo $21 \leq n \leq 25$, segundo o modelo quadrático ajustado.

n	x_0
21	264.73
22	297.29
23	331.86
24	368.41
25	406.97

Esses resultados reforçam a utilidade do parâmetro x_0 como métrica de robustez estrutural. A extrapolação mostra que, para redes maiores, a quantidade de áreas necessárias para

comprometer a eficácia cresce de maneira acelerada, o que sugere que a redundância estrutural introduzida pelo aumento de n torna o sistema mais resiliente a remoções aleatórias.

4.6 Interpretação de k

A série de ajustes logísticos aplicada a cada topologia evidenciou que o parâmetro k não converge para um valor único nem apresenta tendência monotônica clara com o aumento de n . Esse comportamento oscilatório já havia sido antecipado por (DE OLIVEIRA, 2014) no contexto de autômatos unidimensionais, sendo agora confirmado em redes direcionadas mais gerais.

Enquanto x_0 apresentou tendência de crescimento relativamente consistente com n , o parâmetro k mostrou oscilações e ausência de uma progressão monotônica clara. Essa característica já havia sido antecipada em trabalhos sobre autômatos unidimensionais (DE OLIVEIRA, 2014), nos quais pequenas alterações estruturais resultam em grandes variações na taxa de convergência global. Nos grafos direcionados aqui analisados, esse efeito se intensifica, refletindo a sensibilidade de k à topologia fina da rede.

Para tentar capturar a dinâmica de k , diferentes modelos foram ajustados, incluindo funções lineares, quadráticas e exponenciais. No entanto, foi o modelo cúbico que se mostrou mais adequado para representar a série observada no intervalo $7 \leq n \leq 20$. O ajuste produziu a seguinte expressão:

$$k(n) = 9.24 \times 10^{-5}n^3 - 0.004695n^2 + 0.082388n - 0.528285 \quad (7)$$

Essa formulação não deve ser entendida como uma lei universal, mas sim como uma aproximação válida dentro do intervalo amostral considerado. O comportamento oscilatório sugere que o parâmetro k não é apenas uma função da ordem do grafo, mas também de aspectos específicos da estrutura de conexões, como simetrias locais e distribuição de graus. Assim, mesmo com o ajuste cúbico satisfatório, sua extrapolação para valores de n maiores deve ser feita com cautela.

Ao aplicar o modelo para extrapolar $k(n)$ no intervalo $21 \leq n \leq 25$, obtiveram-se os valores listados na Tabela 5. Nota-se que o parâmetro, que até então apresentava valores negativos para $n \leq 20$, começa a se aproximar de zero e eventualmente atinge valores positivos. Essa mudança de sinal sugere uma transição qualitativa no comportamento da dinâmica, possivelmente relacionada ao fato de que em redes maiores, a perda de robustez não se dá mais por quedas abruptas na inclinação da curva, mas por alterações mais sutis e graduais. Em outras palavras, o crescimento da rede pode diluir o impacto de pequenas perturbações estruturais, levando k a assumir valores que indicam uma dinâmica menos sensível a variações locais.

Tabela 5: Valores previstos para $k(n)$ no intervalo $21 \leq n \leq 25$, segundo o modelo cúbico ajustado.

n	$k(n)$
21	-0.0132
22	-0.0041
23	0.0070
24	0.0218
25	0.0406

Apesar dessa interpretação, deve-se enfatizar que a função cúbica ajustada captura apenas a tendência geral e não elimina a natureza oscilatória intrínseca de k . Em particular, é provável que para valores ainda maiores de n , o parâmetro volta a apresentar instabilidades, como oscilações ou desacelerações não previstas pelo modelo. Dessa forma, a extrapolação deve ser utilizada como ferramenta de apoio, mas sempre contrastada com dados empíricos adicionais ou simulações mais extensivas.

5 CONCLUSÃO

A investigação da robustez estrutural de redes de autômatos sob a dinâmica da Regra da Maioria revelou a existência de três regimes distintos de comportamento. Para $n = 3$, a eficácia apresentou forte ruído e ausência de padrão modelável; para $4 \leq n \leq 6$, observou-se um decaimento contínuo da eficácia, sem a emergência de uma fase inicial de resiliência; já para $n \geq 7$, os resultados evidenciaram uma transição sigmoide bem definida, permitindo o ajuste preciso por uma função logística. Essa diferenciação mostra que apenas redes suficientemente grandes exibem uma fase de estabilidade antes do colapso, característica típica de transições de fase.

A análise dos parâmetros logísticos reforçou essa interpretação. O ponto de inflexão x_0 , indicador do limiar crítico de remoções, apresentou crescimento sistemático com o aumento de n , ajustando-se adequadamente a um modelo quadrático. Isso sugere que a redundância estrutural introduzida por redes maiores torna o sistema progressivamente mais tolerante a falhas aleatórias. Em contraste, a inclinação k mostrou-se irregular e oscilatória, ajustando-se melhor a modelos cúbicos restritos ao intervalo amostral. Essa instabilidade evidencia que a velocidade do colapso não depende apenas do tamanho global da rede, mas também de características locais de conectividade, sendo pouco provável que um modelo analítico único capture seu comportamento de forma universal.

Apesar dos avanços, este trabalho adotou como limitação metodológica a remoção sequencial de apenas uma aresta por simulação. Uma extensão natural seria permitir a remoção simultânea de múltiplas arestas aleatórias, o que poderia revelar novas dinâmicas de robustez.

É plausível que, nesse cenário, redes inicialmente resistentes mantenham a eficácia quase inalterada até certo ponto, sofrendo então uma queda abrupta, em analogia a colapsos estruturais descontínuos. Explorar essa possibilidade pode fornecer uma visão mais realista de como sistemas distribuídos reagem a falhas em larga escala, aproximando os modelos teóricos de situações observadas em redes complexas naturais e tecnológicas.

Assim, este estudo contribui ao demonstrar que a robustez emergente de redes de autômatos não é uniforme, mas dependente da escala e da intensidade das perturbações. Ao mesmo tempo, abre caminho para futuras investigações que incorporem cenários de degradação mais severa, oferecendo subsídios para compreender os limites da resiliência estrutural em sistemas governados por regras locais.

6 REFERÊNCIAS

- ABILHOA, Willyan Daniel; DE OLIVEIRA, Pedro Paulo Balbi. Density Classification Based on Agents Under Majority Rule: Connectivity Influence on Performance. In: HERRERA, Francisco; MATSUI, Kenji; RODRÍGUEZ-GONZÁLEZ, Sara (Ed.). **Distributed Computing and Artificial Intelligence, 16th International Conference**. Cham: Springer International Publishing, 2020. v. 1003. P. 163–170. DOI: 10.1007/978-3-030-23887-2_19.
- BANG-JENSEN, Jørgen; GUTIN, Gregory. Basic Terminology, Notation and Results. In: _____. **Classes of Directed Graphs**. Edição: Jørgen Bang-Jensen e Gregory Gutin. Cham: Springer International Publishing, 2018. P. 1–34. DOI: 10.1007/978-3-319-71840-8_1.
- BEHRENS, Freya; HUDCOVÁ, Barbora; ZDEBOROVÁ, Lenka. Dynamical Phase Transitions in Graph Cellular Automata, 2023. DOI: 10.48550/ARXIV.2310.15894.
- DE OLIVEIRA, Pedro. On Density Determination With Cellular Automata: Results, Constructions and Directions. **Journal of cellular automata**, v. 9, p. 357–385, jan. 2014.
- GRATTAROLA, Daniele; LIVI, Lorenzo; ALIPPI, Cesare. Learning Graph Cellular Automata, 2021. DOI: 10.48550/ARXIV.2110.14237.
- MITCHELL, Melanie; CRUTCHFIELD, James P.; HRABER, Peter T. Evolving cellular automata to perform computations: mechanisms and impediments. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, v. 75, n. 1, p. 361–391, ago. 1994. DOI: 10.1016/0167-2789(94)90293-3.
- MONICA, Stefania; BERGENTI, Federico. A Stochastic Model of Self-Stabilizing Cellular Automata for Consensus Formation. In: PROCEEDINGS of the International Conference on Artificial Intelligence Applications and Innovations (AIAI). [S.l.]: Springer, set. 2014. v. 1260.
- SÎRBU, Alina et al. Opinion dynamics: models, extensions and external effects, 2016. DOI: 10.48550/ARXIV.1605.06326.
- WOLFRAM, Stephen. **A new kind of science**. Champaign, IL: Wolfram Media, 2002. 1197 p. ISBN 978-1-57955-008-0.
- WOLFRAM RESEARCH, INC. Champaign, IL: WOLFRAM RESEARCH, INC., 2024. Disponível em: <<https://www.wolfram.com/mathematica>>.