# INVESTIGANDO O POTENCIAL DA ENTROPIA POR PERMUTAÇÃO COMO FERRAMENTA DE SUPORTE À TEORIA DE MARKOWITZ EM R

Carolyne G. Silva e Anderson A. Borba

**Apoio: PIVIC Mackenzie**

## RESUMO

Este trabalho investiga o potencial da Entropia por Permutação (EP) como ferramenta complementar à Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz, buscando avaliar se informações relacionadas à organização, previsibilidade e complexidade temporal das séries financeiras podem acrescentar informações às medidas tradicionais de retorno e risco. A pesquisa foi desenvolvida em duas análises. Na primeira, foram avaliados dez ativos, sendo cinco pertencentes ao mercado brasileiro e cinco do Dow Jones Industrial Average, comparando as informações obtidas a partir do retorno esperado e do risco com as medidas de entropia e complexidade representadas no plano H–C. Na segunda, foi investigada a capacidade da EP de identificar mudanças de regime em uma carteira real durante a crise da pandemia de COVID-19. Os resultados da primeira análise mostraram que Markowitz e a EP fornecem informações de naturezas distintas, apresentando, em diferentes ativos, informações complementares sobre o comportamento das séries. Na segunda análise, a volatilidade prevista por Markowitz foi de 16,54% ao ano, enquanto a volatilidade realizada aumentou de 14,48% fora da crise para 68,70% durante a crise, acompanhada de uma variação de $\Delta H = -0{,}191$ e $\Delta C = +0{,}070$, o que evidencia a necessidade de uma métrica complementar à teoria de Markowitz. Portanto, propõe-se o uso da EP para esse fim. Os resultados obtidos indicam que a EP pode fornecer informações complementares às medidas tradicionais de Markowitz, tanto na caracterização da organização temporal dos ativos quanto na identificação de alterações na dinâmica do risco, especialmente quando aplicada à volatilidade realizada. Cabe ressaltar, contudo, que esses resultados possuem caráter investigativo e que são necessários testes mais robustos para generalizar a ideia proposta. Ainda assim, a pesquisa reuniu evidências de que a EP pode se somar à Teoria Moderna de Portfólio como ferramenta complementar de análise.

**Palavras-chave:** Entropia por Permutação. Carteiras Não-Gaussianas. Teoria de Markowitz.

## ABSTRACT

This study investigates the potential of Permutation Entropy (PE) as a complementary tool to Modern Portfolio Theory proposed by Markowitz, aiming to assess whether information related to the organization, predictability, and temporal complexity of financial series can provide additional insights beyond traditional return and risk measures. The research was developed through two analyses. In the first, ten assets were evaluated, five from the Brazilian market

and five from the Dow Jones Industrial Average, comparing information obtained from expected return and risk measures with entropy and complexity measures represented in the H–C plane. In the second, the ability of PE to identify regime changes was investigated in a real portfolio during the COVID-19 pandemic crash. The results of the first analysis showed that Markowitz and PE provide information of different natures, presenting complementary information about the behavior of the series for different assets. In the second analysis, the volatility estimated by the Markowitz framework was 16.54% per year, while realized volatility increased from 14.48% outside the crash to 68.70% during the crisis, accompanied by changes of $\Delta H = -0.191$ and $\Delta C = +0.070$. Overall, the results indicate that PE can provide information complementary to traditional Markowitz measures, both in characterizing the temporal organization of assets and in identifying changes in risk dynamics, particularly when applied to realized volatility. However, the results are exploratory and do not support considering PE as a substitute for Modern Portfolio Theory.

**Keywords:** Permutation Entropy. Non-Gaussian Portfolios. Markowitz Theory.

## 1. INTRODUÇÃO

A Teoria Moderna de Portfólio, formulada por Markowitz (1952), estabeleceu um dos pilares das finanças ao propor que a escolha de ativos deveria se basear no equilíbrio entre retorno esperado e risco, este último medido pela variância dos retornos. Essa forma de trabalhar se tornou uma referência para a montagem de carteiras de investimento, sustentada no equilíbrio entre risco e retorno e na alocação eficiente entre os ativos, com base no retorno esperado, na variância e na covariância entre os ativos.

Pressupostos como a ausência de custos de negociação, a facilidade total de compra e venda e, principalmente, a distribuição normal dos retornos, no entanto, não refletem plenamente a realidade dos mercados financeiros atuais, como afirmam Zandi et al. (2021). Utilizar apenas essas medidas para representar o comportamento dos ativos deixa de fora aspectos relacionados à organização temporal e à complexidade dos retornos. Nesse cenário, surgem formas alternativas de medição que podem oferecer uma visão adicional do risco, para além das medidas tradicionais baseadas na variância.

O comportamento temporal dos retornos pode conter informações que não são captadas diretamente pelas medidas tradicionais de Markowitz. Os modelos tradicionais de escolha de ativos, embora muito usados, têm dificuldade em captar detalhes da movimentação dos mercados financeiros, incluindo a complexidade temporal e comportamentos que não seguem uma linha simples ou um padrão normal, como a crise da COVID-19, analisada em um dos casos desta pesquisa. A variância, quando usada como única medida de risco, perde parte de sua utilidade justamente nos ativos que mais precisam de uma análise de risco robusta: aqueles cujos retornos fogem ao padrão normal em uma crise, por exemplo.

O problema pode ser resumido pela evolução das perguntas que orientam cada etapa da pesquisa. O modelo tradicional de Markowitz pergunta: “Qual é a correlação média entre os ativos?”. Longin e Solnik (2001) avançam essa pergunta ao questionar o que acontece com essa correlação quando os retornos estão em situações extremas. Este trabalho, por sua vez, propõe uma terceira pergunta, testada tanto na caracterização individual de ativos não-gaussianos quanto na identificação de mudanças de risco em períodos de crise: além da correlação e do risco tradicional, é possível utilizar a Entropia por Permutação para obter informações adicionais sobre a dinâmica e a complexidade dos retornos, de modo a agregar informação que a média, a variância e a matriz de covariância incondicional não capturam diretamente?

Nesse contexto, introduz-se a possibilidade de utilizar a Entropia por Permutação (EP), proposta por Bandt e Pompe (2002), como informação complementar às medidas

tradicionais de retorno e de risco. A lacuna investigada está relacionada à aplicação conjunta de medidas de complexidade temporal e da Teoria de Markowitz, tanto na análise de carteiras não-gaussianas quanto na análise de mudanças no comportamento do risco durante períodos de crise. Ao explorar essa lacuna, a pesquisa contribui para a área ao aproximar duas abordagens que costumam ser estudadas separadamente, a otimização baseada em média e variância e as medidas de complexidade derivadas da teoria da informação, e ao propor a aplicação da EP não apenas aos retornos, mas também à volatilidade realizada da carteira.

Este trabalho tem como objetivo investigar o potencial da Entropia por Permutação (EP) como ferramenta de suporte à Teoria de Markowitz, buscando avaliar se métricas de complexidade temporal agregam informações relevantes à análise tradicional de retorno e risco. Para investigar esse objetivo, a pesquisa foi estruturada em dois testes complementares. O primeiro teste verifica se H e C acrescentam informações à análise tradicional de retorno e risco, aplicados individualmente a dez ativos não-gaussianos, cinco do mercado brasileiro (B3) e cinco do mercado internacional (Dow Jones), com validação fora da amostra entre o período de formação (2023-2024) e o período de teste (2025). O segundo teste verifica se H e C conseguem evidenciar mudanças no comportamento do risco de uma carteira em períodos de crise, sendo aplicado primeiro a uma carteira simulada por meio de uma cadeia de Markov com regimes de calma e de crise, em ambiente controlado, e, em seguida, a uma carteira real do mercado de ações, estendendo o período de análise para incluir a crise da pandemia de COVID-19, tratada como um regime de crise real, único e fora da amostra usada para calibrar o experimento simulado. Do ponto de vista social, a pesquisa se justifica pela importância de estimativas de risco confiáveis para as decisões de investidores individuais, fundos de investimento e fundos de previdência, especialmente em períodos de instabilidade, nos quais ferramentas capazes de sinalizar mudanças no comportamento do risco podem contribuir para decisões mais prudentes.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Na Teoria Moderna de Portfólio, o retorno esperado de um ativo é representado pela média de seus retornos históricos, enquanto o risco individual é mensurado pela variância dos retornos, conforme a Equação (1), em que $\sigma_i^2$ representa a variância dos retornos do ativo $R_i$.

$$\sigma_{\mathrm{i}}{}^2 = Var(R_{\mathrm{i}}) \tag{1}$$

Estendendo essa lógica para uma carteira composta por $n$ ativos, com pesos $w_i$ cuja soma é igual a 1, o retorno esperado da carteira é obtido pela combinação linear dos retornos médios individuais, conforme a Equação (2).

$$E(R) = \Sigma_{\mathrm{i}=1}{}^{\mathrm{n}}\, w_{\mathrm{i}}\mu_{\mathrm{i}} \tag{2}$$

O risco da carteira, por sua vez, depende não apenas das variâncias individuais, mas também das covariâncias entre os ativos, conforme a Equação (3), em que $\sigma^2$ representa a variância da carteira, $w$ é o vetor de pesos e $\Sigma$ é a matriz de covariância dos retornos.

$$\sigma^2 = w^{\mathrm{T}}\Sigma w \tag{3}$$

Esse raciocínio fundamenta a diversificação como estratégia de redução do risco, uma vez que a combinação de ativos cujos retornos não apresentam comportamento perfeitamente sincronizado pode reduzir a variância total da carteira sem necessariamente reduzir o retorno esperado. A partir da relação entre retorno e risco das diferentes combinações de ativos, obtém-se a chamada fronteira eficiente (SOUZA; BIGNOTTO, 1999). A partir da matriz de covariância, também é possível obter a carteira de mínima variância global (GMV), definida como a combinação de pesos que minimiza a variância total da carteira:

$$w_{GMV} = \frac{\Sigma^{-1}1}{1^T\Sigma^{-1}1} \tag{4}$$

Apesar de sua importância, a abordagem de média-variância apresenta limitações quando aplicada a séries financeiras que apresentam características diferentes das hipóteses utilizadas na modelagem tradicional. Retornos financeiros podem apresentar assimetria, excesso de curtose e ocorrência de eventos extremos, características que podem dificultar a representação adequada do risco por medidas baseadas exclusivamente na média e na variância. Essa questão motiva a utilização de abordagens complementares para a análise da dinâmica dos mercados.

Nesse contexto, Longin e Solnik (2001) estudaram as correlações entre mercados acionários internacionais em situações de elevada volatilidade e observaram que as correlações tendem a aumentar significativamente durante períodos extremos, especialmente em situações de queda dos mercados. Esse resultado é relevante para a presente pesquisa porque indica que as relações entre os ativos utilizadas na construção de uma carteira podem se modificar justamente nos períodos em que o risco se torna mais elevado.

Além da alteração das correlações, os retornos financeiros podem apresentar assimetria e caudas mais pesadas do que as previstas por uma distribuição normal. Essas características indicam que eventos extremos podem ocorrer com maior frequência ou magnitude do que seria esperado sob uma hipótese de normalidade. Nesse contexto, a EP apresenta uma abordagem complementar, voltada à análise da organização temporal das séries.

A EP quantifica a complexidade de uma série temporal a partir da entropia de Shannon aplicada à distribuição dos padrões ordinais. Sua formalização, proposta por Bandt e Pompe (2002), parte da construção de vetores de dimensão de imersão $D$. Cada vetor é reorganizado de acordo com a ordem crescente de seus elementos e associado a um dos $D!$ padrões ordinais possíveis, representados pelas permutações $\pi$. A partir da frequência relativa $p(\pi)$ de cada padrão, a entropia de permutação de ordem $D$ é definida por:

$$H(D) = -\Sigma\, p(\pi)\, log\, p(\pi), com\, 0 \leq H(D) \leq log(D!) \quad (5)$$

Para permitir a comparação entre séries ou entre diferentes configurações da dimensão de imersão, a entropia pode ser normalizada, resultando em valores entre zero e um:

$$H_{\text{norm}} = H(D) \,/\, log(D!), com\, H_{\text{norm}} \in [0,1] \quad (6)$$

Valores próximos de zero indicam maior concentração em determinados padrões ordinais, associada a maior regularidade e previsibilidade da série, enquanto valores próximos de um indicam uma distribuição mais uniforme entre os padrões possíveis, associada a maior diversidade e menor previsibilidade (HENRY; JUDGE, 2019).

Uma propriedade importante da EP é sua invariância a transformações monótonas, uma vez que o método considera apenas a ordem relativa entre as observações, e não sua magnitude. Dessa forma, mudanças de escala que preservem a ordenação dos valores não alteram os padrões ordinais identificados. Essa característica diferencia a EP das medidas tradicionais de dispersão, como a variância, que dependem diretamente da magnitude das observações.

A dimensão de imersão $D$ determina a quantidade de padrões ordinais possíveis, dada por $D!$. Consequentemente, dimensões maiores exigem um número maior de observações para que as frequências dos padrões sejam estimadas de maneira confiável, sendo necessário considerar a relação entre o tamanho da amostra e o número de permutações possíveis.

A análise conjunta da entropia e da complexidade permite posicionar cada série no plano entropia-complexidade, delimitado pelas curvas teóricas $C_{min}(H)$ e $C_{max}(H)$. Esse plano permite observar simultaneamente o grau de diversidade dos padrões ordinais e a presença de estrutura na dinâmica temporal da série.

De maneira geral, regiões de baixa entropia estão associadas a séries com maior regularidade e organização temporal. Em contrapartida, valores elevados de entropia e baixa complexidade são característicos de comportamentos próximos ao ruído aleatório. Entre esses extremos encontram-se séries que apresentam níveis intermediários ou elevados de entropia combinados com maior complexidade, indicando a presença de estruturas temporais que não são observadas em processos puramente aleatórios.

A Figura 1 ilustra essa interpretação por meio de quatro séries artificiais com comportamentos previamente conhecidos: uma onda senoidal pura, caracterizada por comportamento repetitivo; um ruído aleatório, associado à imprevisibilidade; o mapa logístico, que apresenta comportamento determinístico complexo; e um passeio aleatório, caracterizado por oscilações acumuladas e comportamento estocástico. A representação dessas séries no plano H–C permite visualizar como diferentes estruturas temporais podem ocupar regiões distintas do espaço de entropia e complexidade.

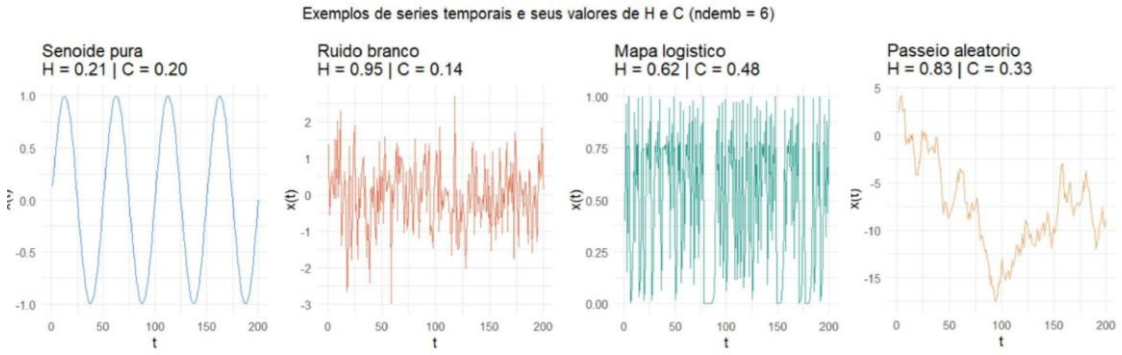



Figura 1. Séries temporais sintéticas e seus respectivos valores de H e C.

Fonte: elaborado pelos autores.

## 3. METODOLOGIA

A pesquisa foi implementada em linguagem R e organizada em duas análises. A primeira utiliza dados reais de dez ativos, enquanto a segunda utiliza inicialmente uma carteira simulada para verificar o funcionamento do procedimento e, posteriormente, uma carteira real para validar o resultado em um evento histórico de crise.

Na primeira análise, a escolha dos ativos baseou-se na rejeição da normalidade pelo teste de Jarque-Bera (JARQUE; BERA, 1980), resultando em duas carteiras: uma

brasileira (B3) e uma internacional (Dow Jones). A validação segue a lógica de teste fora da amostra, utilizando o período de 2023-2024 para formação e 2025 para teste.

A validação da pesquisa segue a lógica de teste com dados novos. Usa-se um período inicial para ajustar e descrever como as carteiras funcionam, seja pela variância de Markowitz, seja pelos valores H e C da Entropia por Permutação. Depois, usa-se um período seguinte para verificar se aquela descrição se confirma. O período inicial usa dois anos de dados diários, cerca de 500 observações para cada carteira, para definir quais ativos usar e calcular os valores de Markowitz e de EP. O período de teste é o intervalo seguinte. Nele, observa-se como as carteiras realmente se comportaram e compara-se esse resultado com o que cada método indicou na fase inicial.

A Tabela 1 apresenta a composição da carteira brasileira e a Tabela 2 apresenta a composição da carteira internacional.

Tabela 1. Dados e estatísticas dos ativos da carteira brasileira (B3)

| **Ativo** | **COGN3** | **HAPV3** | **IRBR3** | **MGLU3** | **PETR4** |
|---|---|---|---|---|---|
| Empresa | Cogna Educação | Hapvida | IRB Brasil RE | Magazine Luiza | Petrobras |
| Segmento (B3) | Consumo Cíclico / Educação | Saúde / Planos de Saúde | Financeiro / Resseguros | Consumo Cíclico / Comércio Eletrônico | Petróleo, Gás e Biocombustíveis |
| Assimetria | 0,2887 | -1,9776 | 0,8841 | 0,4684 | -0,2709 |
| Curtose (excesso) | 1,3938 | 26,9974 | 12,7092 | 3,5886 | 2,6004 |
| Jarque-Bera | 76,27 | 24.736,93 | 5.474,08 | 458,57 | 235,60 |
| p | p < 0,001 | p < 0,001 | p < 0,001 | p < 0,001 | p < 0,001 |
| Classificação | Não-Normal | Não-Normal | Não-Normal | Não-Normal | Não-Normal |

Fonte: elaborada pelos autores a partir de dados da B3.

Tabela 2. Dados e estatísticas dos ativos da carteira internacional (Dow Jones)

| **Ativo** | **AAPL** | **MSFT** | **JPM** | **JNJ** | **KO** |
|---|---|---|---|---|---|
| Empresa | Apple Inc. | Microsoft Corporation | JPMorgan Chase & Co. | Johnson & Johnson | The Coca-Cola Company |
| Segmento | Tecnologia / Eletrônicos e software | Tecnologia / Software e computação em nuvem | Financeiro / Bancos | Saúde / Farmacêutico | Consumo Não Cíclico / Bebidas |
| Assimetria | 0,25763 | -0,02082 | 0,64532 | 0,52268 | -0,34259 |
| Curtose (excesso) | 2,76099 | 1,91539 | 11,88466 | 4,77690 | 2,71745 |
| Jarque-Bera | 167,05 | 78,05 | 3.007,16 | 504,53 | 166,29 |
| p | p < 0,001 | p < 0,001 | p < 0,001 | p < 0,001 | p < 0,001 |
| Classificação | Não-Normal | Não-Normal | Não-Normal | Não-Normal | Não-Normal |

Fonte: elaborada pelos autores a partir de dados de mercado (Dow Jones Industrial Average).

Na segunda análise, inicialmente foi construída uma carteira simulada com quatro ativos e 3.000 observações diárias. Os dados foram gerados com dois regimes definidos por uma cadeia de Markov: um regime calmo, caracterizado por menor volatilidade e menor correlação, e um regime de crise, caracterizado por maior volatilidade e maior correlação.

A Figura 2 apresenta o QQ-plot dos retornos da carteira simulada e evidencia um afastamento da distribuição normal principalmente nas extremidades da distribuição, indicando a presença de caudas mais pesadas. Essa característica é relevante para a análise de regimes, pois está relacionada ao comportamento extremo dos retornos em períodos de maior estresse. O resultado é consistente com a discussão de Longin e Solnik (2001) sobre a alteração do comportamento dos mercados em situações extremas, especialmente durante períodos de queda, embora a figura represente especificamente a distribuição dos retornos da carteira simulada.

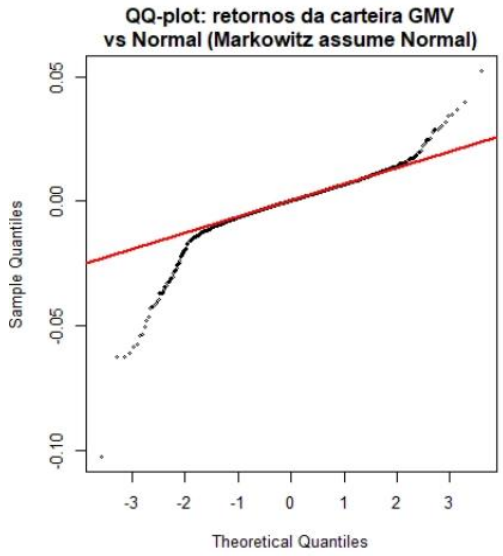



Figura 2. QQ-plot dos retornos da carteira GMV simulada em comparação com a distribuição normal.

Fonte: elaborado pelos autores.

A carteira de mínima variância global foi calculada utilizando uma única matriz de covariância estimada sobre toda a amostra. Sobre os retornos da carteira, foram calculados H e C em janelas móveis de vinte dias, utilizando D=3. O mesmo procedimento foi realizado sobre a volatilidade realizada da carteira.

A volatilidade realizada foi calculada em uma janela móvel de vinte observações: $RV_t = \sqrt{[(1/20)\,\Sigma\, r^2]}$. A função dessa etapa simulada foi verificar se o código conseguia diferenciar os regimes conhecidos e responder em qual série a EP apresentava um sinal mais claro.

Após os testes na carteira simulada, o procedimento foi aplicado a uma carteira real composta por cinco ativos do Dow Jones (Tabela 2): AAPL, MSFT, JPM, JNJ e KO. Para essa etapa, foi utilizado um período ampliado, de janeiro de 2019 a dezembro de 2025, permitindo incluir o regime de crise associado à pandemia de COVID-19. A análise buscou verificar, em um evento real de estresse de mercado, se as alterações observadas na volatilidade da carteira também eram acompanhadas por mudanças nas medidas de entropia e complexidade, avaliando o potencial da EP como sinal complementar de identificação de mudança de regime.

## 4. RESULTADO E DISCUSSÃO

### Análise 1: Caracterização individual dos ativos

Conforme mencionado anteriormente, o objetivo desta seção é avaliar o valor informacional agregado pela EP à leitura de Markowitz, reforçando que a EP atua como uma ferramenta de suporte, não como substituta. As Tabelas 3 e 4 sintetizam essa classificação, analisando convergências e divergências entre as abordagens com base na estrutura temporal dos ativos.

Tabela 3. Síntese comparativa: carteira brasileira

| Ativo | Interpretação Markowitz | Interpretação EP | O que realmente aconteceu | Resultado |
|---|---|---|---|---|
| COGN3 | Retorno esperado negativo e risco moderado, cenário desfavorável. | Alta entropia e baixa complexidade, comportamento bastante imprevisível. | Após iniciar 2025 próxima de 1,3, apresentou forte recuperação, chegando a aproximadamente 3,5, contrariando o retorno negativo esperado. | EP mais consistente |
| HAPV3 | Retorno esperado negativo e risco moderado-alto, cenário desfavorável e maior exposição à volatilidade. | Maior H e menor C, comportamento mais imprevisível da carteira. | Manteve trajetória predominantemente de queda, saindo de cerca de 33,5 e chegando próximo de 15, confirmando o cenário desfavorável. | Markowitz mais consistente |
| IRBR3 | Maior retorno esperado, porém com elevado risco, potencial de alta acompanhado de volatilidade. | Alta entropia e maior complexidade, imprevisibilidade, mas com maior estrutura. | Apresentou forte valorização, saindo de aproximadamente 52,9 e chegando a 53,7, com oscilações ao longo do ano. | Markowitz mais consistente |
| MGLU3 | Retorno esperado negativo e risco alto, cenário desfavorável e elevada volatilidade. | Menor H da carteira brasileira, mas ainda elevado, menor imprevisibilidade relativa. | Permaneceu em patamares baixos, oscilando aproximadamente entre 6,7 e 9,8, sem recuperação expressiva. | Markowitz mais consistente |
| PETR4 | Retorno esperado positivo e risco moderado, | Alta entropia e baixa complexidade, | Após iniciar perto de 37,7, apresentou queda e terminou próximo de 30,8, | EP mais consistente |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | cenário relativamente favorável. | comportamento difícil de antecipar. | contrariando a expectativa positiva. | |

Fonte: elaborada pelos autores.

No caso da HAPV3, o retorno médio negativo indicava um cenário desfavorável segundo Markowitz, mas não mostrava o tamanho da queda que veio depois. Já a alta entropia mostrava que era difícil prever o comportamento no tempo e era compatível com a instabilidade observada em 2025. Esse é um caso em que os dois métodos se complementam. Na COGN3, o retorno negativo esperado não aconteceu, pois o ativo se recuperou bem. Os valores médios de H e C não indicavam valores extremos e eram mais compatíveis com o resultado observado do que a leitura de Markowitz. Já na IRBR3, os dois métodos superestimaram o tamanho do movimento, mas o erro da EP foi maior. O ativo que parecia ter a maior organização no tempo no começo virou o mais aleatório da carteira em 2025. Essa foi uma mudança que nenhum dos dois previu bem e que mostra como a EP tem dificuldade com quebras bruscas. Na PETR4, Markowitz apresentou uma expectativa positiva associada a um risco relativamente menor, enquanto o comportamento observado em 2025 apresentou queda, evidenciando uma limitação da interpretação baseada apenas nos parâmetros históricos.

Tabela 4. Síntese comparativa: carteira internacional

| **Ativo** | **Interpretação Markowitz** | **Interpretação EP** | **O que realmente aconteceu** | **Resultado** |
|---|---|---|---|---|
| AAPL | Retorno esperado positivo e risco moderado, expectativa de valorização. | Entropia relativamente menor e complexidade moderada, maior presença de estrutura. | Apresentou valorização relevante, saindo de aproximadamente 241,8 e chegando a 273,1, apesar de oscilações no período. | Complementares/coerentes |
| JNJ | Retorno esperado positivo e baixo risco, cenário favorável. | Menor H e maior C, comportamento mais estruturado e relativamente previsível. | Após oscilações no primeiro semestre, apresentou forte recuperação, chegando próximo de 206,9. | Complementares/coerentes |
| JPM | Maior retorno esperado e maior risco, potencial elevado de valorização acompanhado de risco. | Entropia relativamente baixa e complexidade moderada, maior possibilidade de identificação de padrões. | Apresentou forte valorização, de aproximadamente 267,3 para 323,4, com tendência de alta ao longo do ano. | Markowitz mais consistente |
| KO | Retorno esperado levemente positivo e baixo risco, expectativa de estabilidade/valorização. | Alta entropia e baixa complexidade, elevada imprevisibilidade. | Permaneceu relativamente estável, mas terminou com leve valorização, saindo de aproximadamente 56,8 para 70,1. | Markowitz mais consistente |
| MSFT | Retorno esperado positivo e risco moderado, expectativa de valorização, com | Alta entropia e baixa complexidade, comportamento | Apresentou forte valorização, chegando a aproximadamente 518, mas posteriormente sofreu queda e terminou em | EP mais consistente |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | volatilidade intermediária. | predominantemente imprevisível. | 487,5, evidenciando maior volatilidade. | |

Fonte: elaborado pelos autores a partir de dados de mercado (Dow Jones Industrial Average).

Na AAPL e na JPM, Markowitz e a EP trouxeram visões que se completam e fazem sentido. Os retornos e riscos previstos foram compatíveis com o observado em 2025, enquanto os valores H e C mostravam que havia uma organização no tempo. Essa é uma informação que o modelo de Markowitz, isoladamente, não fornece. Já a JNJ teve um retorno médio perto de zero, o que não previu a forte subida de 2025. A sua combinação de baixa entropia e maior complexidade já mostrava um movimento mais organizado, uma informação que não aparece nos parâmetros μ e σ. A KO teve a maior entropia e a menor complexidade do grupo, com um comportamento lateral em 2025. Esse é um dos melhores exemplos de como a EP ajuda na análise. Na MSFT, o modelo de Markowitz indicava uma subida estável, mas em 2025 houve mudanças muito fortes. A alta entropia e a baixa complexidade do período inicial sinalizaram, nesse caso, a imprevisibilidade do movimento, algo que Markowitz sozinho não mostrava.

O caso da IRBR3 merece atenção por mostrar um limite importante. O ativo com maior organização no começo virou o mais aleatório da carteira brasileira em 2025. Foi uma mudança que nem a EP nem Markowitz previram. Isso indica que a vantagem da EP pode depender de quanto os preços se mantêm estáveis. Ela parece ser mais confiável em ativos que mantêm seu comportamento ao longo do tempo do que naqueles que sofrem mudanças bruscas. Comparando as carteiras, a vantagem de informação da EP não foi igual nas duas. Na internacional, ela foi mais precisa na maioria dos casos, como JNJ, KO e MSFT. Na brasileira, escolhida por fugir mais do padrão normal, o resultado variou mais. Houve dois casos, IRBR3 e PETR4, em que o modelo de Markowitz foi mais preciso.

**Análise 2: Detecção de regime**

Na segunda análise, inicialmente foi construída uma carteira simulada com quatro ativos e 3.000 observações diárias, considerando dois regimes previamente definidos por uma cadeia de Markov: um regime calmo, caracterizado por menor volatilidade e menor correlação, e um regime de crise, caracterizado por maior volatilidade e maior correlação. Essa etapa teve como objetivo avaliar o funcionamento do procedimento em um ambiente controlado, no qual os momentos de transição entre os regimes eram conhecidos.

A carteira de mínima variância global (GMV) foi construída a partir de uma única matriz de covariância estimada sobre toda a amostra, permitindo comparar o comportamento da carteira com uma carteira igualmente ponderada. A Figura 3 apresenta a evolução dos regimes simulados e dos *drawdowns* das duas carteiras ao longo do

período, permitindo observar o efeito dos diferentes regimes sobre o comportamento da carteira.

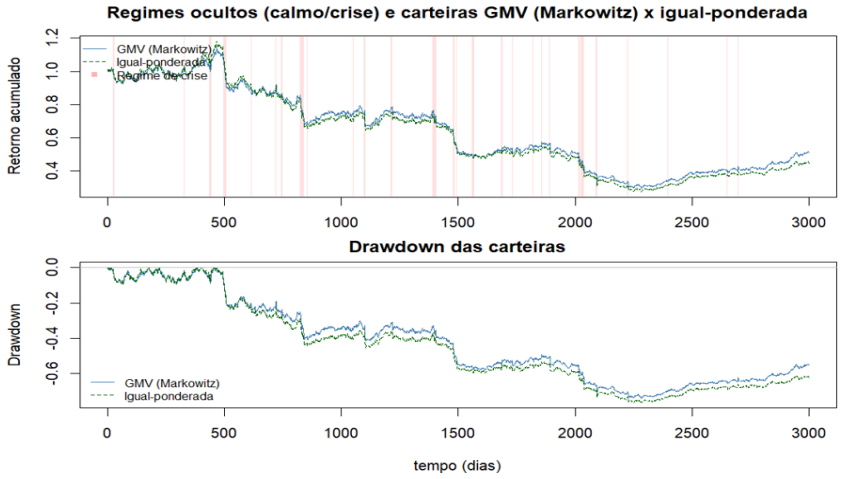



Figura 3. Regimes ocultos (calmo/crise) e carteiras GMV (Markowitz) x igualmente ponderada, com *drawdown*.

Fonte: elaborada pelos autores.

Na sequência, foi analisada a volatilidade realizada da carteira GMV, calculada em uma janela móvel de vinte observações. A comparação entre os períodos classificados como calmo e de crise permite verificar se a mudança de regime previamente definida também produz uma alteração mensurável na intensidade das oscilações da carteira. A volatilidade realizada apresentou nível médio de 9,93% ao ano nos dias classificados como calmos e 37,52% ao ano nos dias de crise, evidenciando aumento expressivo da variabilidade durante o regime de crise.

```
Volatilidade REALIZADA em dias calmos:  9.93% a.a.
Volatilidade REALIZADA em dias de crise: 37.52% a.a.  <-- muito acima do previsto

Assimetria (skewness) dos retornos da carteira GMV: -1.79  (Markowitz assume ~0)
Curtose (kurtosis) dos retornos da carteira GMV:    16.85  (Normal = 3; caudas
pesadas se >> 3)

Drawdown maximo - carteira GMV (Markowitz):     -73.8%
Drawdown maximo - carteira igual-ponderada:     -76.5%
-> Se a 'otimizacao' de Markowitz nao reduz o drawdown de forma
   relevante frente a uma carteira ingenua, o beneficio de
   diversificacao que ela promete e ilusorio nos momentos que importam.
```

Figura 4. Markowitz (GMV) na carteira simulada.

Fonte: elaborada pelos autores.

A partir dessa caracterização, foram calculadas a entropia $H$ e a complexidade $C$ em janelas móveis de vinte dias, utilizando dimensão de imersão $D = 3$. O procedimento foi aplicado tanto aos retornos brutos quanto à volatilidade realizada, permitindo comparar as medidas de EP entre os dois regimes. A Figura 5 apresenta os valores médios de $H$ e

$C$ obtidos para cada série nos períodos calmo e de crise, além da variação entre os regimes.

H e C médios por regime (janela de 20 dias), retorno bruto x volatilidade realizada da carteira GMV

| Série | Estatística | Só calma | Com crise | Nº janelas (calma / crise) | Δ (crise − calma) |
|---|---|---|---|---|---|
| Retorno bruto | H (entropia) | 0.936 | 0.946 | 2212 / 327 | 0.010 |
| Retorno bruto | C (complexidade) | 0.061 | 0.052 | 2212 / 327 | -0.009 |
| Volatilidade realizada | H (entropia) | 0.886 | 0.818 | 2207 / 327 | -0.069 |
| Volatilidade realizada | C (complexidade) | 0.098 | 0.142 | 2207 / 327 | 0.044 |

Figura 5. H e C médios por regime, calmo versus crise (janela de 20 dias), carteira simulada.

Fonte: elaborada pelos autores.

Os resultados da carteira simulada foram utilizados principalmente como uma etapa de verificação do procedimento, permitindo avaliar se as medidas calculadas pelo código eram capazes de diferenciar os regimes previamente conhecidos e, principalmente, em qual das duas séries, retornos brutos ou volatilidade realizada, a EP apresentava um sinal mais claro de mudança.

Após a etapa simulada, a metodologia foi aplicada a uma carteira real formada por AAPL, MSFT, JPM, JNJ e KO (Tabela 2). O período foi ampliado de 01/01/2019 a 31/12/2025, permitindo incluir a crise da pandemia de COVID-19. A carteira de mínima variância global foi novamente construída utilizando uma única matriz de covariância estimada sobre toda a amostra.

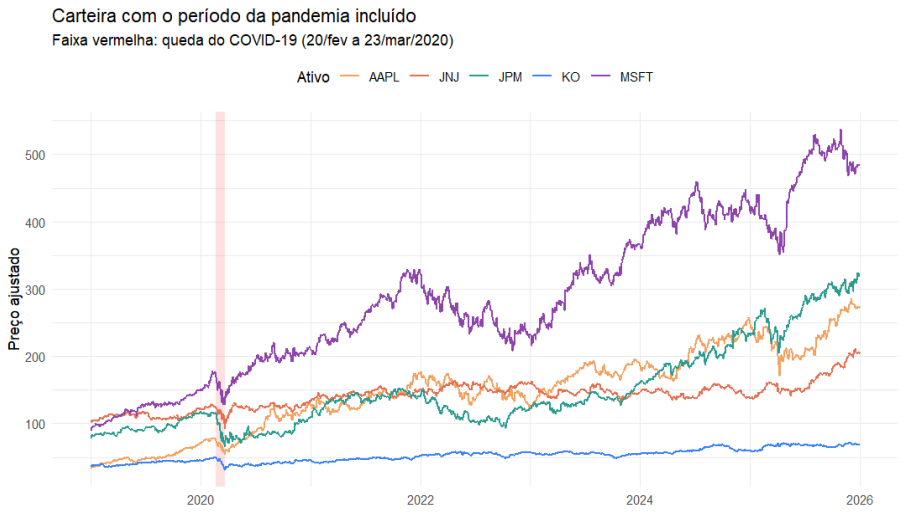



Figura 6. Carteira com o período da pandemia incluído (preço ajustado, 2019-2025).

Fonte: elaborada pelos autores a partir de dados de mercado (Dow Jones Industrial Average).

O período de crise real foi definido entre 20/02/2020 e 23/03/2020, destacado em vermelho na Figura 6. As janelas móveis permaneceram por vinte dias e foram classificadas conforme a proporção de observações pertencentes à crise. Janelas fora do

período foram classificadas como fora da crise, janelas parcialmente sobrepostas foram tratadas como transição, e janelas com pelo menos 25% dos dias dentro da crise foram classificadas como com crise. A Figura 6 apresenta a evolução dos preços ajustados dos cinco ativos ao longo de 2019 a 2025 e permite observar que a queda da pandemia foi concentrada em um intervalo relativamente curto, no qual todos os ativos apresentaram retração, embora com diferentes intensidades. Esse comportamento evidencia uma mudança abrupta nas condições de mercado e fornece o contexto para avaliar se as medidas utilizadas posteriormente conseguem representar essa alteração.

```
======================================================================
Markowitz (GMV) na carteira real com a pandemia incluida
======================================================================
 AAPL   JNJ   JPM    KO  MSFT
0.008 0.461 0.034 0.365 0.132

Volatilidade PREVISTA pelo Markowitz (amostra 2019-2025 inteira): 16.54% a.a.
Volatilidade REALIZADA fora do crash:      14.48% a.a.
Volatilidade REALIZADA DURANTE o crash:    68.70% a.a.  <-- muito acima do
previsto

Assimetria (skewness) da carteira GMV: -0.09  (Markowitz assume ~0)
Curtose (kurtosis) da carteira GMV:     13.98  (Normal = 3)

Drawdown maximo da carteira GMV (2019-2025): -30.7%
```

Figura 7. Markowitz (GMV) na carteira real com a pandemia.

Fonte: elaborada pelos autores.

Pela abordagem de Markowitz, a carteira GMV apresentou volatilidade prevista de 16,54% ao ano, calculada a partir da matriz de covariância estimada sobre toda a amostra. Quando essa estimativa é comparada ao comportamento efetivamente observado, verifica-se uma diferença importante: a volatilidade realizada foi de 14,48% ao ano fora da crise, valor próximo da previsão, mas aumentou para 68,70% ao ano durante a crise. Assim, a estimativa de Markowitz representou razoavelmente o comportamento médio da amostra, mas não acompanhou o aumento extremo do risco durante a pandemia. A distribuição dos retornos também se afastou da hipótese de normalidade, apresentando assimetria de −0,09 e curtose de 13,98, indicando a presença de caudas mais pesadas. Portanto, embora a otimização tenha produzido uma carteira de menor variância segundo a matriz utilizada, sua estimativa de risco não refletiu adequadamente a magnitude do risco observado no período de crise.

H e C médios dentro x fora do crash da pandemia (janela de 20 dias), carteira GMV real (2019-2025)

| Série | Estatística | Fora do crash | Com crash | Nº janelas (fora / crash) | Δ (crash − fora) |
|---|---|---|---|---|---|
| Retorno bruto | H (entropia) | 0.942 | 0.945 | 1697 / 34 | 0.004 |
| Retorno bruto | C (complexidade) | 0.056 | 0.056 | 1697 / 34 | 0.000 |
| Volatilidade realizada | H (entropia) | 0.883 | 0.693 | 1688 / 34 | -0.191 |
| Volatilidade realizada | C (complexidade) | 0.101 | 0.171 | 1688 / 34 | 0.070 |

Figura 8. H e C médios dentro versus fora da crise da pandemia (janela de 20 dias), carteira real.

Fonte: elaborada pelos autores.

No retorno bruto, o deslocamento entre os períodos foi praticamente inexistente: $H$ passou de 0,942 para 0,945, uma variação de apenas +0,004, enquanto $C$ permaneceu em 0,056, com variação de 0,000. Portanto, a aplicação da EP diretamente sobre os retornos brutos não apresentou alteração relevante associada à crise. Já na volatilidade realizada, o comportamento foi bastante diferente: $H$ caiu de 0,883 para 0,693, uma redução de 0,191, enquanto $C$ aumentou de 0,101 para 0,171, correspondendo a uma elevação de 0,070. A redução de $H$ indica menor entropia e, portanto, maior organização temporal dos padrões observados na volatilidade, enquanto o aumento de $C$ indica maior estrutura estatística. Assim, diferentemente do retorno bruto, a volatilidade realizada apresentou uma mudança clara entre os períodos, acompanhando a alteração nas condições de mercado durante a crise.

Comparando as duas abordagens, observa-se que Markowitz e a Entropia por Permutação responderam de maneiras distintas à mudança provocada pela crise. A estimativa de Markowitz, baseada na covariância incondicional, representou adequadamente o nível médio de risco da amostra, mas subestimou de forma expressiva o risco durante a crise: a volatilidade prevista de 16,54% ficou próxima dos 14,48% realizados fora da crise, mas muito distante dos 68,70% observados durante a crise. A EP, por sua vez, não apresentou alteração relevante quando aplicada ao retorno bruto, mas identificou uma mudança clara na volatilidade realizada, com $H$ reduzindo em 0,191 e $C$ aumentando em 0,070. Portanto, para detectar a mudança na estrutura temporal associada à crise, a EP apresentou um sinal mais sensível que a estimativa incondicional de Markowitz, especialmente quando aplicada à volatilidade realizada. Isso não significa que a EP substitua a otimização de Markowitz, mas que ela fornece uma informação complementar sobre mudanças na dinâmica do risco que a matriz de covariância incondicional não capturou.

## 5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho investigou o potencial da Entropia por Permutação como ferramenta complementar à Teoria Moderna de Portfólio de Markowitz em duas situações: na caracterização individual de ativos e na identificação dinâmica de mudanças de regime.

A primeira análise mostrou que a Entropia por Permutação e o modelo de Markowitz fornecem informações de naturezas distintas. Enquanto Markowitz utiliza principalmente o retorno esperado μ e o risco σ para avaliar a relação entre retorno e variabilidade, a EP permite analisar características relacionadas à organização temporal dos retornos por meio das medidas de entropia H e complexidade C. Dessa forma, os resultados reforçam a ideia de que a EP não deve ser interpretada como substituta da Teoria de Markowitz, mas como uma ferramenta complementar, capaz de acrescentar uma dimensão de análise que não é diretamente contemplada pela média e pela variância.

A comparação entre o período de formação e o comportamento observado em 2025 permitiu identificar diferentes situações entre os dez ativos analisados. Em alguns casos, como MGLU3, IRBR3, AAPL e JPM, as informações fornecidas por Markowitz e pela EP apresentaram características coerentes com o comportamento posteriormente observado. Em outros, como HAPV3, PETR4, JNJ, KO e MSFT, a EP apresentou informações adicionais relacionadas à estrutura temporal dos retornos que não estavam diretamente representadas por μ e σ. Também foram observados casos em que a expectativa baseada no retorno médio não se confirmou, como em COGN3 e JNJ, demonstrando que o comportamento histórico dos retornos não necessariamente se mantém em períodos posteriores.

A síntese dos resultados mostrou que, dos dez ativos analisados, três apresentaram informações consideradas mais consistentes pela perspectiva da EP (COGN3, PETR4 e MSFT), cinco apresentaram informações mais consistentes pela perspectiva de Markowitz (HAPV3, IRBR3, MGLU3, JPM e KO), e os dois restantes apresentaram informações complementares ou coerentes entre as duas abordagens (AAPL e JNJ). Entretanto, esse resultado deve ser interpretado com cautela, pois a classificação possui caráter investigativo e não representa um teste estatístico de superioridade entre os métodos. O objetivo foi verificar como as informações obtidas no período de formação se relacionavam com o comportamento posterior, e não estabelecer que uma metodologia fosse universalmente superior à outra.

Um aspecto importante observado durante a pesquisa foi que maior risco não necessariamente correspondeu a maior entropia, assim como menor risco não necessariamente esteve associado a menor entropia. Essa ausência de correspondência direta reforça a distinção entre as medidas. Enquanto σ está relacionado à magnitude das oscilações dos retornos, H está relacionado ao grau de imprevisibilidade da organização temporal da série. Da mesma forma, a complexidade C acrescenta informações sobre a presença de estrutura na dinâmica temporal. Portanto, os resultados sugerem que risco e imprevisibilidade não devem ser tratados como conceitos equivalentes.

É importante ressaltar que a Entropia por Permutação não mede se um investimento é bom ou ruim, nem determina a direção futura dos preços. Seus resultados devem ser interpretados como uma descrição da organização e da previsibilidade temporal dos retornos. Assim, quando uma característica observada no plano H–C apresentou compatibilidade com o comportamento de 2025, isso não significa que a EP tenha previsto o movimento do ativo. A principal contribuição está na possibilidade de fornecer uma informação adicional sobre a dinâmica da série que não é diretamente obtida pelas medidas de média e variância utilizadas em Markowitz.

Na segunda análise, a simulação mostrou que a aplicação da EP aos retornos brutos não produziu um sinal claro, enquanto a aplicação à volatilidade realizada apresentou queda de H e aumento de C durante o regime de crise. A principal evidência da Análise 2 veio da carteira real durante a crise da pandemia. A volatilidade prevista por Markowitz foi de 16,54% ao ano, enquanto a volatilidade realizada passou de 14,48% fora da crise para 68,70% durante a crise. Paralelamente, a EP aplicada à volatilidade realizada apresentou $\Delta H = -0{,}191$ e $\Delta C = +0{,}070$.

Dessa forma, a resposta à pergunta central da Análise 2 é que a EP foi mais eficaz para detectar a mudança de regime quando aplicada à volatilidade realizada do que quando aplicada diretamente aos retornos. O padrão apareceu primeiro na carteira simulada e posteriormente foi reproduzido, com maior intensidade, na carteira real durante a pandemia.

Esse resultado não significa que a EP seja capaz de prever crises ou determinar a direção futura dos preços. Seu papel é descrever alterações na organização temporal da série. No caso analisado, a queda de H e o aumento de C funcionaram como um sinal de que a estrutura da volatilidade havia se modificado. A comparação com Longin e Solnik (2001) também ajuda a interpretar esse resultado. Os autores demonstram que as relações de dependência entre mercados podem mudar significativamente em situações extremas, especialmente durante quedas.

O presente trabalho acrescenta a essa discussão uma perspectiva baseada na organização temporal da volatilidade, investigando se essa estrutura também apresenta uma alteração mensurável por meio da EP. Ainda assim, os resultados devem ser interpretados como exploratórios. A principal contribuição desta pesquisa está, portanto, na utilização da Entropia por Permutação como uma dimensão adicional de análise. Na primeira análise, ela contribui para caracterizar a organização temporal dos ativos. Na segunda, quando calculada sobre a volatilidade realizada em janelas móveis, apresenta potencial para funcionar como um sinal complementar de mudança de regime.

A EP, portanto, não substitui Markowitz. Enquanto Markowitz fornece a estrutura para a otimização da carteira e mensuração tradicional do risco, a EP pode auxiliar na identificação de momentos em que o comportamento temporal desse risco está se modificando. Trabalhos futuros deverão testar o indicador em outros eventos históricos, ampliar o número de ativos e mercados e utilizar testes estatísticos formais para avaliar a robustez das métricas propostas nesta pesquisa.

Como principal perspectiva para trabalhos futuros, destaca-se também a necessidade de investigar de maneira mais sistemática se existe uma relação entre H, C, μ e σ. A ampliação da amostra para um número maior de ativos, setores, mercados e períodos permitiria verificar estatisticamente se determinadas regiões do plano H–C estão associadas a níveis específicos de retorno esperado ou volatilidade. Também seria relevante analisar diferentes períodos de mercado, incluindo momentos de alta volatilidade, crises e períodos de maior estabilidade, para verificar se a relação entre essas variáveis permanece consistente em diferentes condições.

Dessa forma, os resultados desta pesquisa não permitem afirmar que exista uma relação estatisticamente comprovada entre o plano H–C e os parâmetros μ e σ, mas fornecem evidências de que as duas abordagens podem apresentar informações complementares. A identificação dessa possível relação constitui uma questão relevante para pesquisas futuras e pode contribuir para uma compreensão mais ampla do comportamento dos ativos financeiros. Assim, a Entropia por Permutação demonstra potencial não como substituta da Teoria Moderna de Portfólio, mas como uma ferramenta adicional de análise, capaz de ampliar a avaliação tradicional de risco e retorno ao incorporar aspectos relacionados à regularidade, previsibilidade e complexidade temporal das séries financeiras.

## 6. REFERÊNCIAS

BANDT, Christoph; POMPE, Bernd. Permutation Entropy: A Natural Complexity Measure for Time Series. **Physical Review Letters**, v. 88, n. 17, p. 174102, abr. 2002. DOI: 10.1103/PhysRevLett.88.174102.

HENRY, Miguel; JUDGE, George. Permutation Entropy and Information Recovery in Nonlinear Dynamic Economic Time Series. **Econometrics**, v. 7, n. 1, p. 10, mar. 2019. DOI: 10.3390/econometrics7010010.

JARQUE, Carlos M.; BERA, Anil K. Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals. **Economics Letters**, v. 6, n. 3, p. 255-259, 1980. DOI: 10.1016/0165-1765(80)90024-5.

LONGIN, François; SOLNIK, Bruno. Extreme Correlation of International Equity Markets. **The Journal of Finance**, v. 56, n. 2, p. 649-676, abr. 2001. DOI: 10.1111/0022-1082.00340.

MARKOWITZ, Harry. Portfolio Selection. **The Journal of Finance**, v. 7, n. 1, p. 77-91, 1952. DOI: 10.2307/2975974.

SOUZA, Zilmar José de; BIGNOTTO, Edson Costa. Teoria de Portfólio: Composição Ótima de uma Carteira de Investimento. **Economia & Pesquisa**, Araçatuba, v. 1, n. 1, p. 61-78, mar. 1999.

ZANDI, Gholamreza et al. Research on Stock Portfolio Based on Time Series Prediction and Multi-objective Optimization. **Advances in Mathematics: Scientific Journal**, v. 10, n. 3, p. 1509-1528, mar. 2021. DOI: 10.37418/amsj.10.3.37.

## GLOSSÁRIO

**Assimetria**: medida que indica se os retornos se concentram mais de um lado da média; valores negativos indicam quedas extremas mais frequentes que altas extremas (JARQUE; BERA, 1980).

**Cadeia de Markov**: modelo probabilístico em que o próximo estado depende apenas do estado atual; neste trabalho, foi utilizada para simular a alternância entre os regimes calmo e de crise.

**Carteira de mínima variância global (GMV)**: combinação de ativos que apresenta o menor risco possível, segundo a matriz de covariância (MARKOWITZ, 1952).

**Carteira igualmente ponderada**: carteira em que todos os ativos recebem o mesmo peso.

**Covariância incondicional**: covariância estimada com toda a amostra, sem distinguir períodos calmos e de crise.

**Curtose (excesso)**: medida da frequência de valores extremos em relação à distribuição normal; valores positivos indicam caudas pesadas, isto é, eventos extremos mais frequentes que o esperado (JARQUE; BERA, 1980).

**Distribuição normal (gaussiana)**: distribuição de probabilidade simétrica, em forma de sino, frequentemente assumida para os retornos na abordagem de média-variância (ZANDI et al., 2021).

***Drawdown***: queda percentual do valor da carteira em relação ao seu pico anterior.

**Fronteira eficiente**: conjunto de carteiras que oferecem o maior retorno esperado para cada nível de risco (MARKOWITZ, 1952; SOUZA; BIGNOTTO, 1999).

**Matriz de covariância (Σ)**: matriz que descreve como os retornos de cada par de ativos variam em conjunto (MARKOWITZ, 1952).

**Retorno esperado (μ)**: média dos retornos históricos de um ativo, utilizada como estimativa do retorno futuro (MARKOWITZ, 1952).

**Risco (σ) ou volatilidade**: desvio-padrão dos retornos, que mede a intensidade das oscilações em torno da média (MARKOWITZ, 1952).

**Volatilidade realizada**: volatilidade efetivamente observada em uma janela recente de dias, em oposição à volatilidade prevista pelo modelo.

**Contatos:** scarolynegomes@gmail.com e anderson.borba@mackenzie.br